TP Scilab – Différences finies

Exercice 1 : **Équation de Laplace.**

1. Résoudre numériquement par la méthode des différences finies le problème
$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x)\,, & x \in]0,1[\,, \\ u(0) = \alpha\,, \qquad u(1) = \beta\,. \end{cases}$$
lorsque c et f sont des fonctions suffisamment régulières et $c \geq 0$ sur $[0,1]$: on veut approcher $[u(t_1), \ldots, u(t_N)]$ par $[U_1, \ldots, U_N]$ où $t_n = n/(N+1)$.
2. Comparer les résultats obtenus lorsque $c(x) = x$, $f(x) = (1+2x-x^2)e^x$ et $\alpha = \beta = 0$ (auquel cas la solution exacte est $u(x) = (1-x)e^x$). Représenter l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte dans un graphique log-log.
3. Résoudre numériquement par la méthode des différences finies le problème
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x)\,, & x \in]0,1[\,, \\ u(0) = \alpha\,, \qquad u'(1) = 0\,. \end{cases}$$
lorsque f est suffisamment régulière. On peut traiter la condition en $x = 1$ de deux façons :
   - $u_{N+1} - u_N = 0$,
   - $u_{N+1} - u_N = \frac{h^2}{2} f(1)$.

   Cette dernière condition vient du calcul :
$$\begin{aligned} u_{N+1} - u_N &= \int_{t_N}^1 u'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_N}^1 \int_t^1 f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \sim h^2/2 f(1)\,. \end{aligned}$$
4. Comparer les résultats obtenus lorsque $f(x) = x$ et $\alpha = 0$. Représenter l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte dans un graphique log-log.

Exercice 2 : **Équation de la chaleur.**

1. On s'intéresse au problème
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{x,x} u = 0\,, & t > 0\,, \quad x \in]0,1[\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & \forall x \in [0,1]\,, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0\,, & \forall t \geq 0\,, \end{cases}$$
où u_0 est une fonction suffisamment régulière. Trouver une solution approchée de ce problème avec le schéma d'Euler explicite (ordre 1). Que se passe-t-il lorsque $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$? lorsque $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$?
2. Trouver une solution approchée de ce problème avec le schéma d'Euler implicite, puis avec le schéma de Crank-Nicolson.
3. Quel est l'ordre des différents schémas ?

Précisions sur les schémas

– En dimension 1, la matrice du laplacien discret s'écrit

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

de sorte que, en notant u_h et u_h'' les vecteurs $u_h = {}^{\mathbf{T}}[u(x_1), \dots, u(x_N)]$ et $u_h'' = {}^{\mathbf{T}}[u''(x_1), \dots, u''(x_N)]$, on a :

$$u_h'' \sim A u_h \,.$$

– Pour l'équation de la chaleur, la méthode est dite d'Euler explicite ou implicite par rapport à la variable de temps. Cela donne, en notant $h = 1/(N+1)$ le pas d'espace et $k = T/M$ le pas de temps,

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{k} - AU_n = 0\,, \qquad \text{pour Euler explicite,}$$
$$\frac{U_{n+1} - U_n}{k} - AU_{n+1} = 0\,, \qquad \text{pour Euler implicite,}$$
$$\frac{U_{n+1} - U_n}{k} - \frac{1}{2}(AU_n + AU_{n+1}) = 0\,, \qquad \text{pour Crank-Nicolson.}$$