ENS-Lyon - Automne 2009
1ère année - Introduction à l'Analyse Numérique

Planche n^o 1

Une approche pour le problème de Cauchy : analyse et résolution numérique.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (I sera tour à tour compact, ou quelconque).
L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni d'une norme $\|.\|$. Soit :

$$f : \left(\begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ (t,u) & \mapsto & f(t,u) \end{array} \right), \tag{1}$$

une application continue. On suppose de plus que f est *globalement lipschitzienne* en u au sens suivant :

$$\text{pour tout compact } K \subset I, \text{ il existe } \lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que}$$

$$\forall\, t \in K, \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad \|f(t,u) - f(t,v)\| \leq \lambda \|u - v\|. \tag{2}$$

Soit enfin $\overline{u_0}$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Nous allons considérer le **problème de Cauchy associé à** I, f **et** $(t_0, \overline{u_0})$, i.e. :

Trouver une fonction $u(t)$ (dans un espace à préciser, e.g. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$) telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(t_0) & = & \overline{u_0}, \;\; t_0 \in I \text{ (condition initiale)} \\ u'(t) & = & f(t, u(t)), \;\; \forall\, t \in I \end{array} \right. \tag{3}$$

Le but de cette planche est d'étudier l'existence et l'unicité de solution à ce problème puis d'aborder un classe de méthodes de résolution numérique permettant le calcul effectif de la solution.

Exercice 1 *Où l'on parle du Théorème de point fixe.*

1. Soit X un espace métrique complet (non vide) et F une application de X dans lui-même. On suppose que F est contractante, i.e., en notant d la distance sur X,

$$\exists\, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad c < 1 \quad t.q. \quad \forall (x,y) \in X^2, \quad d(F(x), F(y)) \leq c\, d(x,y) \tag{4}$$

   Montrer qu'il existe un unique point $z \in X$ tel que $F(z) = z$ et obtenu comme limite de la suite induite par l'itération $x_{n+1} = F(x_n)$ (initiée par un $x_0 \in X$ quelconque) avec

$$\forall\, n \geq 1, \quad d(x_n, z) \;\leq\; \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1). \tag{5}$$

2. Il est possible de raffiner le Théorème de point fixe démontré à l'instant. Supposons qu'il existe un entier p tel que l'itérée $F^p := \underbrace{F \circ F \circ ... \circ F}_{p \text{ fois}}$ est contractante. Montrer que F possède un unique point fixe, limite de la suite des $x_n = F^n(x_0)$ (dont on précisera la vitesse de convergence).

Exercice 2 *Où l'on aborde un théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Nous voulons ici montrer que le problème de Cauchy (3) admet une unique solution $u(t)$ définie sur I tout entier et étudier la continuité par rapport aux conditions initiales.

1. Nous allons considérer pour commencer le cas où I est un compact. Notons alors $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^d$ et munissons le de la norme de la convergence uniforme : $\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} \|u(t)\|$: $\mathcal{C}$ est un Banach.
   Montrer que le problème de Cauchy (3) est équivalent à un problème de point fixe $F(u) = u, \quad u \in \mathcal{C}$, pour une fonction F que l'on déterminera.
2. En déduire que le problème de Cauchy (3) admet une unique solution $u(t)$ définie sur I tout entier, lorsque celui-ci est compact.
   Indication : remarquer que (i) si la "lipschitzianité" de F est ad hoc, on obtient une partie du résultat et que (ii) même si l'on a pas cette chance, celle-ci arrive irrémédiablement pour l'un de ses itérés. Sympathique, non ?
3. Démontrer le résultat pour un intervalle I quelconque.
4. *Application* : (i) système linéaire à coefficients constants $u' = Au, \quad u(0) = \overline{u_0}$; écrire les itérés $F^n(\overline{u_0})$ (ii) équation du pendule : $y'' = -\sin(y), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$.
5. *Autre exemple* : Peut-on appliquer le théorème dans le cas suivant ?

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t,u) & \mapsto & u^2. \end{array}$$

   Montrer que le système $u' = u^2, u(0) = 1$ admet une unique solution et la déterminer. Que dire du temps maximal d'existence ? Commentaires sur le théorème.
6. Continuité par rapport à la condition initiale.
   (a) Soient v, α, β trois fonctions réelles continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$ et $\beta \geq 0$ sur $[a,b]$. On suppose que pour tout $t \in [a,b]$,
   $$v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)v(s)ds. \tag{6}$$
   Montrer que pour tout $t \in [a,b]$,
   $$v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\, e^{\left(\int_s^t \beta(u)du\right)} ds.$$
   (b) Soit $t_0 \in I$. On définit l'application $\psi : (t,a) \rightarrow \psi(t,a)$ telle que $\forall (t,a), \frac{\partial \psi(t,a)}{\partial t} = f(t, \psi(t,a)), \psi(t_0, a) = a$.
   Montrer que ψ est $\Lambda(t)$-lipschitzienne par rapport à a.
   (c) En déduire que ψ est continue. Commentaire sur la motivation d'une telle analyse.

Exercice 3 *Méthodes à un pas pour les équations différentielles.*

Dans la plupart des applications réelles, il n'existe pas de solution analytiques des équations différentielles considérées. Nous allons étudier une classe de méthode pour calculer numériquement des solutions approchées du problème de Cauchy (3).

Ici, nous considérons naturellement un **intervalle compact** $I = [t_0, T]$, que l'on discrétise à l'aide de $n+1$ points $t_k = t_0 + kh,\ k = 0, ..., n$. Le pas de discrétisation h vérifie : $h = (T - t_0)/n$; si bien que $t_n = T$. L'idée consiste à approcher la solution $u(t_k)$ au point t_k par u_k grâce à la méthode itérative suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \overline{u_0} + \zeta_n \text{ (approximation de la condition initiale)} \\ u_{k+1} & = & u_k + h\,\varphi(t_k, u_k, h),\ \ \forall\, 0 \leq k \leq n-1 \end{array}\right. \tag{7}$$

où ζ_n est une petite perturbation de la condition initiale, φ **est une fonction continue de** $I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}^d$ **qui est à déterminer pour construire cette méthode de résolution à un pas** (le calcul de u_{k+1} n'utilise que u_k, les points discrets calculés précedemment dans l'itération n'interviennent pas dans (7) ; si cela avait été le cas, on parlerait de méthode "multi-pas").

L'exemple typique de méthode à un pas est celle d'Euler explicite :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \overline{u_0} + \zeta_n \\ u_{k+1} & = & u_k + h\, f(t_k, u_k),\ \ \forall\, 0 \leq k \leq n-1 \end{array}\right. \tag{8}$$

Nous rappellons les définitions suivantes.

Définition 1 *Soit u une solution au problème de Cauchy (3), l'**erreur de consistance** en t_{k+1} est définie par :*

$$\varepsilon_{k+1} = u(t_{k+1}) - u(t_k) - h\,\varphi(t_k, u(t_k), h) \tag{9}$$

Définition 2 *La méthode à un pas induite par φ est **consistante** avec (3) si*

$$\lim_{h \to 0} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \|\varepsilon_{k+1}\| = 0 \tag{10}$$

Définition 3 *S'il existe une constante $M > 0$, indépendante de h, telle que pour toutes suites $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ et $\{\varepsilon_k\}$ définies par les relations : $\forall\, 0 \leq k \leq n-1$:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{k+1} & = & u_k + h\,\varphi(t_k, u_k, h), \\ v_{k+1} & = & v_k + h\,\varphi(t_k, v_k, h) + \varepsilon_{k+1}, \end{array}\right. \tag{11}$$

on ait l'estimation

$$\max_{0 \leq k \leq n} \|u_k - v_k\| \ \leq\ M \left(\|u_0 - v_0\| + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \|\varepsilon_{k+1}\| \right), \tag{12}$$

*alors on dit que la méthode à un pas induite par φ est **stable**.*

Définition 4 *La méthode à un pas induite par φ est **convergente** lorsque :*

$$u_0 = \overline{u_0} \ \ \Rightarrow\ \ \lim_{h \to 0} \max_{0 \leq k \leq n} \|u(t_k) - u_k\| = 0. \tag{13}$$

1. Montrer que la méthode est consistante ssi
$$\forall\, t \in I,\ \forall\, u \in \mathbb{R}^d,\ \varphi(t,u,0) = f(t,u) \tag{14}$$
2. Soit deux suites des réels positifs $\{a_k\}_{k\geq 0}$, $\{b_k\}_{k\geq 0}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que
$$\forall\, k \geq 0,\ a_{k+1} \leq (1+\alpha)\, a_k + b_k \tag{15}$$
Montrer que
$$\forall\, k \geq 0,\ a_k \leq e^{\alpha\, k} a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b_j\, e^{\alpha(k-j-1)} \tag{16}$$
3. Montrer que si φ est lipschitzienne par rapport à u, alors la méthode à un pas est stable.
4. Montrer que si la méthode à un pas induite par φ est consistante et stable alors elle est convergente.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite déterminée par (7) et on définit sur I la fonction U_n par
$$\left\{\begin{array}{l} U_n(t_k) = u_k \text{ pour } k = 0,..,n \\ U_n \text{ affine sur } [t_k;t_{k+1}] \text{ pour } k = 0,..,n-1 \end{array}\right. \tag{17}$$
On suppose de plus que $\lim_{n\to+\infty} \zeta_n = 0$. Montrer que la suite de fonctions $\{U_n\}_n$ converge uniformément vers u sur I.
6. *Application* : que dire (a) de la méthode d'Euler ? (b) de la méthode d'Euler améliorée (définie ci-dessous) ?
$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \overline{u_0} + \zeta_n \\ \left\{\begin{array}{rcl} u_{temp} &=& u_k + \frac{h}{2}\, f(t_k,u_k), \\ u_{k+1} &=& u_k + h\, f(t_k + \frac{h}{2}, u_{temp}), \quad \forall\, 0 \leq k \leq n-1 \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{18}$$

Nous allons désormais considérer la méthode d'Euler implicite :
$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& \overline{u_0} + \zeta_n \\ u_{k+1} &=& u_k + h\, f(t_{k+1},u_{k+1}), \quad \forall\, 0 \leq k \leq n-1 \end{array}\right. . \tag{19}$$
Comme son nom l'indique, on ne peut pas calculer u_{k+1} explicitement en fonction de u_k avec la formulation précédente. Nous voulons montrer que ce schéma est bien défini et le reformuler pour en faire l'analyse.

7. Montrer, qu'à (t,u) fixé, le système $x = u + hf(t,x)$ admet une unique solution pour $0 < h < h_0$. Notons la $G(t,u,h)$.
8. Réécrire ce schéma sous la forme d'une méthode à un pas (7). Montrer que pour tout $h \in]0;h_0[$ et pour tout $u_k \in \mathbb{R}^d$, u_{k+1} est défini de manière unique par le schéma (19).
9. Montrer que la méthode d'Euler implicite est convergente, pour un maillage assez fin.
10. Nous voulons contrôler l'erreur : $e_k = u(t_k) - u_k$. Montrer que, lorsque h est assez petit, il existe un $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\|e_k\| \ \leq\ (1+h\overline{\lambda})\, \frac{e^{\overline{\lambda}\, t_k} - 1}{\overline{\lambda}}\, \omega(h,u') \ +\ e^{\overline{\lambda}\, t_k}\, \|e_0\|, \tag{20}$$
avec $\omega(\delta,v) = \max\{|v(s) - v(t)| : (s,t) \in I,\ \ |s-t| \leq \delta\}$.