ENS-Lyon - Automne 2009
1ère année - Introduction à l'Analyse Numérique

Planche n^o 3

Différences finies.

On considère le problème suivant : étant données deux fonctions $c, f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et deux constantes α, β, trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ qui vérifie le *problème aux limites* :

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0,1[, u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \tag{1}$$

Remarque : *On admettra que si on suppose $c \geq 0$ sur $[0,1]$ alors ce problème a une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$, qu'on notera φ ; et que $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$.*
Étant donné $N \geq 1$ on pose $h = \frac{1}{N+1}$ et on définit un maillage uniforme de pas h de l'intervalle $[0,1]$ comme étant l'ensemble des points $x_i = ih$ pour $i = 0 \ldots N+1$.
La méthode des différences finies est un moyen d'obtenir une approximation de la solution φ aux noeuds x_i du maillage, c'est-à-dire qu'on cherche un vecteur $u_h = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ tel que u_i soit proche de $\varphi(x_i)$ pour $i = 1 \ldots N$, la qualité de l'approximation étant d'autant meilleure que le pas est petit.

1. a. Montrer qu'il existe $\theta_i \in]-1,1[, i = 1 \ldots N$ tels que

$$-\varphi''(x_i) = \frac{-\varphi(x_{i-1}) + 2\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})}{h^2} + \frac{h^2}{12}\varphi^{(4)}(x_i + \theta_i h).$$

   b. Afin d'alléger l'écriture on écrit $\varphi_i = \varphi(x_i), c_i = c(x_i), f_i = f(x_i), i = 1 \ldots N$. On pose $\varphi_h = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)^t$ et $f_h = (f_1 + \frac{\alpha}{h^2}, f_2, \ldots, f_{N-1}, f_N + \frac{\beta}{h^2})^t$; trouver le vecteur $\varepsilon_h(\varphi)$ ainsi que la matrice A_h tels que $\varepsilon_h(\varphi) \to 0$ quand $h \to 0$ et le système se réécrive sous la forme

$$A_h \varphi_h = f_h + \varepsilon_h(\varphi).$$

   c. Comme il n'est pas possible de calculer explicitement φ_h, nous allons négliger le terme $\varepsilon_h(\varphi)$ et chercher la solution u_h de l'équation :

$$A_h u_h = f_h.$$

   Montrer que A_h est définie positive. On en déduit que u_h est bien défini.

2. a. **Définition** : *On dit qu'une matice carrée réelle M est* monotone *si elle est inversible et si la matrice M^{-1} est positive, c'est-à-dire que tous les éléments m_{ij} sont positifs, où $(m_{ij})_{i,j} = M^{-1}$.*
   Montrer qu'une matrice M est monotone si et seulement si l'inclusion

$$\{v \in \mathbb{R}^n : Mv \geq 0\} \subset \{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\}$$

   est satisfaite.

   b. Montrer que A_h est monotone.

3. On rappelle que dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la norme $|||\cdot|||_\infty$ est définie par

$$|||M|||_\infty = \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1,\ldots,N} |m_{i,j}|.$$

   a. Soit $e = (1,\ldots,1)^t \in \mathbb{R}^N$; montrer que $|||A_h^{-1}|||_\infty = \|A_h^{-1}e\|_\infty$.

   b. Soit $A_{0,h}$ la matrice A_h obtenue lorsque $c = 0$. Montrer que $|||A_{0,h}^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}$.
   Indication : on introduira le problème suivant $-u''(x) = 1$ *pour* $x \in]0,1[$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

   c. Montrer que $|||A_h^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}$.
   Indication : On remarquera que $A_{0,h}^{-1} - A_h^{-1} = A_{0,h}^{-1}(A_h - A_{0,h})A_h^{-1}$.

4. Montrer que la majoration

$$\|u_h - \varphi_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{0\leq x\leq 1} |\varphi^{(4)}(x)|$$

   est satisfaite.
   Remarque : Ainsi, on a montré que cette méthode d'approximation d'un opérateur différentiel (dite des *différences finies*) est ici d'ordre 2 en ce sens que l'erreur, mesurée ici par $\|u_h - \varphi_h\|_\infty$ est un $O(h^2)$. Cet exemple permet d'introduire quelques idées générales en analyse numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles :

   a. Le choix de la norme n'est pas évident a priori : il a fallu ici que $|||A_h^{-1}|||_\infty$ soit majorée uniformément. Ceci correspond à la notion de *stabilité*.

   b. La convergence dépend également du comportement asymptotique de *l'erreur de consistance* mesurée ici par $\|\varepsilon_h(\varphi)\|_\infty$.