ENS-Lyon - Automne 2009
1ère année - Introduction à l'Analyse Numérique

Planche n^o 4

Optimisation – Inversion de matrices.

Exercice 1 *Méthode du gradient conjugué.*

On cherche la solution $\bar{x}$ du système linéaire (1) $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in SDP_n$, l'ensemble des matrices symétriques définies positives à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. On pose $J(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$, montrer que $\bar{x}$ est solution de (1) ssi $\bar{x}$ minimise $J(x)$.
   On se donne un point de départ x^0 et on pose $e(x) = x - \bar{x}$, l'erreur ; $r(x) = Ax - b$, le résidu. On introduit de plus les espaces $\mathcal{H}_k = \{P(A)r^0, P \in \mathbb{R}[X], d^\circ P \leq k-1\}$.
2. Montrer qu'il existe $l \leq n$ tel que, $\forall k \in [\![0, l]\!], \dim\mathcal{H}_k = k$ et $\forall k \geq l+1, \dim\mathcal{H}_k = l$.
   En déduire que l'application
   $$\left(P \in \mathbb{R}_{k-1}[X] \to P(A)r^0 \in \mathcal{H}_k\right)$$
   est un isomorphisme pour $k \in [\![0, l]\!]$.
3. Montrer qu'il existe une unique base $\{p_0, \ldots, p_{k-1}\}$ de $\mathcal{H}_k$ (à multiplication par un scalaire près), pour $k \leq l$, qui soit A-orthogonale (c'est à dire telle que $(Ap_i, p_j) = 0$ si $i \neq j$).
   Remarque : On dit que les vecteurs p_j sont conjugués, *d'où le nom de la méthode.*
4. Montrer que, $\forall k \leq l$, J admet un unique minimum sur $x^0 + \mathcal{H}_k$, qu'on notera x^k.
   Montrer qu'alors $x^{k+1} - x^k \in \mathbb{R}p_k$.
5. a. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_l[X]\backslash\{0\}$ tel que $P(A)r^0 = 0$. Montrer qu'alors $P(A)e^0 = 0$.
   b. Montrer que $P(0) \neq 0$. On peut donc choisir P de sorte que $P(0) = 1$.
   c. En considérant $P(X) - 1$, on montrera que $\bar{x} \in x^0 + \mathcal{H}_l$. En déduire que $x^l = \bar{x}$.

Exercice 2 *Méthode de la puissance*

La méthode de la puissance permet d'approcher la valeur propre de plus grand module pour une matrice donnée. On prend donc $M \in M_n(\mathbb{C})$ et on suppose que M a une seule valeur propre de plus grand module, que l'on note λ. On prend $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $x^0 \in \mathbb{C}^n$. On définit alors x^k par récurrence : $x^{k+1} = \frac{Mx^k}{\|Mx^k\|}$. On note $\rho(M) = |\lambda|$.

1. Montrer que si $\rho(M) = 0$, il existe k tel que $x^k = 0$; par conséquent la méthode s'arrête.

2. Soit A une matrice quelconque et $\rho(A)$ son rayon spectrale, montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ norme sur } \mathbb{C}^n, N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

3. On suppose maintenant $\rho(M) \neq 0$. Soit $\mathbb{C}^n = E \oplus F$ la décomposition de $\mathbb{C}^n$ en sous-espaces stables par M, avec $Sp(M|_E) = \{\lambda\}$ et $\lambda \notin Sp(M|_F)$. On suppose que $x^0 \notin F$. Montrer qu'alors $Mx^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Le but est maintenant de montrer que $\lim_{k\to\infty} \|Mx^k\| = \rho(M)$, et que l'on obtient également un vecteur propre associé.
   a. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $b^0 = 0$ dans l'étude. Et conclure dans le cas où la valeur propre λ a sa multiplicité algébrique et sa multiplicité géométrique qui sont égales.
   b. On retourne dans le cas où les multiplicités sont distinctes. Montrer que :

$$\lim_{k\to\infty} \|Mx^k\| = \rho(M),$$

   et que $V = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\rho(M)}\right)^k x^k$ est un vecteur unitaire de M, associé à la valeur propre λ. Et si $V_j \neq 0$, montrer qu'on a alors :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(Mx^k)_j}{x_j^k} = \lambda.$$

Exercice 3 *Décomposition LU d'une matrice tridiagonale.*

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $(c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} = a_i$, $\forall i \in [\![1, n-1]\!], a_{i,i+1} = b_i$, $\forall i \in [\![2, n]\!], a_{i,i-1} = c_i$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\delta_k = \det(a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$.

1. Établir une relation de récurrence sur les δ_k.
2. On suppose que tous les δ_k sont non-nuls. Établir l'existence d'une décomposition de A sous la forme LU :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & b_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

3. Calculer les déterminants δ_k et la décomposition LU quand elle existe, dans le cas où :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} = 2b \ ; \ \forall i \in [\![1, n-1]\!], b_i = c_i = -1.$$

4. Déduire de la question 2 une méthode simple de résolution de systèmes linéaires dans le cas où la matrice intervenant est tridiagonale. Calculer la complexité de cet algorithme.

Remarque : Cette complexité est à comparer à celle du pivot de Gauss pour une matrice quelconque : $\frac{2n^3}{3}$.