Stabilité $\mathbf{L^1}$ pour des lois d'équilibre scalaires. Contrôle de l'équation de continuité.

M. Mercier

ICJ, Lyon

GdR Moad, 18 Mars 2009

Introduction

Lois d'équilibre scalaires :

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \partial_t u + \mathrm{Div} f(t,x,u) = F(t,x,u) & (t,x) & \in & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbf{L^1} \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV} & x & \in & \mathbb{R}^N, \end{array}\right.$$

où $f \in \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$, $F \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

- Existence et unicité, dépendance aux conditions initiales : Théorème de Kružkov
- Dépendance par rapport au flux et à la source ?

Equation de continuité :

$$\partial_t u + \mathrm{Div}(uV(u(t))) = 0\,, \qquad u(0,\cdot) = u_0 \in \mathbf{L^1} \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV}\,,$$

où $V : \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ est une fonctionnelle non-locale régularisante, par exemple, si $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application régulière :

- $V(u) = v\left(\int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}} u\,\mathrm{d}x\right)$ dans le cas d'une chaîne de montage
- $V(u) = v(\eta *_x u)\vec{v}(x)$, η étant un noyau régularisant, dans le cas du trafic piéton.

But :

- Existence d'une solution entropique ?
- Dérivée de Gâteaux du semi-groupe obtenu ?

Equation de continuité :

$$\partial_t u + \mathrm{Div}(uV(u(t))) = 0\,, \qquad u(0,\cdot) = u_0 \in \mathbf{L^1} \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV}\,,$$

où $V : \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ est une fonctionnelle non-locale régularisante, par exemple, si $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application régulière :

- $V(u) = v\left(\int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}} u\,\mathrm{d}x\right)$ dans le cas d'une chaîne de montage
- $V(u) = v(\eta *_x u)\vec{v}(x)$, η étant un noyau régularisant, dans le cas du trafic piéton.

But :

- Existence d'une solution entropique ?
- Dérivée de Gâteaux du semi-groupe obtenu ?

Plan

1. Stabilité $\mathbf{L}^1$ par rapport au flux et à la source
   - Résultats existants
   - Estimation de la variation totale
   - Dépendance par rapport au flux et à la source
2. Existence de solutions pour f, F non-locales
   - Trafic piéton
   - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Plan

1. Stabilité $\mathbf{L^1}$ par rapport au flux et à la source
   - Résultats existants
   - Estimation de la variation totale
   - Dépendance par rapport au flux et à la source
2. Existence de solutions pour f, F non-locales
   - Trafic piéton
   - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Théorème (Kružkov (1970))

Notons $\Omega_A = [0, T] \times \mathbb{R}^N \times [-A, A]$ *pour tout* $A \geq 0$. *Si*

$$(\mathbf{K}) \quad \forall A > 0\,,\ \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A)\,,\ \partial_u(F - \mathrm{div} f) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A)$$
$$\text{et } F - \mathrm{div} f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A)$$

alors, pour tout $u_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^1)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ *tel que* $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M_0$, *il existe une unique solution entropique* $u \in \mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ *continue à droite en temps et il existe* $M > 0$ *tel que* $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M$.
Soit $v_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ *tel que* $\|v_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M_0$, *et alors*

$$\left\|(u - v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\gamma t}\left\|u_0 - v_0\right\|_{\mathbf{L}^1}\,,$$

où $\gamma = \left\|\partial_u(F - \mathrm{div} f)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}$.

Théorème (Kružkov (1970))

Notons $\Omega_A = [0,T] \times \mathbb{R}^N \times [-A, A]$ *pour tout* $A \geq 0$. *Si*

$$(\mathbf{K}) \quad \forall A > 0\ ,\ \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A)\,,\ \partial_u(F - \mathrm{div} f) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A)$$
$$\text{et } F - \mathrm{div} f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A)$$

alors, pour tout $u_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^1)(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ *tel que* $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M_0$, *il existe une unique solution entropique* $u \in \mathbf{L}^\infty([0,T];\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}))$ *continue à droite en temps et il existe* $M > 0$ *tel que* $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M$.
Soit $v_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ *tel que* $\|v_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M_0$, *et alors*

$$\left\|(u-v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\gamma t}\|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1}\,,$$

où $\gamma = \left\|\partial_u(F - \mathrm{div} f)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}$.

Précédents Résultats

Lucier (1986) / Bouchut & Perthame (1998) : flux ne dépendant que de u, et pas de source $F = G = 0$,

Théorème

Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *sont globalement lipschitziennes, alors* $\exists C > 0$ *tel que* $\forall u_0, v_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ *conditions initiales pour*

$$\partial_t u + \mathrm{Div} f(u) = 0\,, \qquad \partial_t v + \mathrm{Div} g(v) = 0\,.$$

avec de plus $v_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, *on a* $\forall t \geq 0$,

$$\left\|(u - v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1} + Ct\mathrm{TV}(v_0)\,\mathbf{Lip}\,(f - g)\,.$$

Variation totale

Définition : Pour $u \in \mathbf{L}^1_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}(u) &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N} u \,\mathrm{div}\Psi\,; \quad \Psi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)\,, \quad \|\Psi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq 1\right\}\,; \\ \text{et} & \\ \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}) &= \left\{u \in \mathbf{L}^1_{\mathbf{loc}}; \mathrm{TV}(u) < \infty\right\}\,. \end{aligned}$$

Remarque : Lorsque f et F ne dépendent que de u on a

$$u_0 \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV} \Rightarrow \forall t \geq 0\,, \quad u(t) \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV}$$

et de plus, notant $\gamma = \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}$,

$$\mathrm{TV}(u(t)) \leq \mathrm{TV}(u_0) e^{\gamma t}\,.$$

Chen & Karlsen (2005) : flux de la forme $f(t,x,u) = \lambda(x)l(u)$, $g(t,x,v) = \mu(x)m(v)$, pas de source $F = G = 0$,

$$\begin{aligned}\left\|(u-v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1} + C_1 t \big(&\|\lambda-\mu\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\lambda-\mu\|_{\mathbf{W}^{1,1}} \\ &+\|l-m\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|l-m\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}\big)\end{aligned}$$

où $C_1 = C\sup_{[0,T]}\left(\mathrm{TV}(u(t)), \mathrm{TV}(v(t))\right)$.

Problème : On ne dispose pas en général d'estimation sur la variation totale !

Plan

Estimation de la variation totale (R.M. Colombo, M.M., M.D. Rosini)

Théorème (TV)

Supposons (f, F) *vérifient* ***(K)*** $+$ ***(H1)***. *Soit* $\kappa_0 = NW_N \left((2N+1) \|\nabla_x \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} \right)$. *Si* $u_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, *alors* $\forall t \in [0, T]$, $u(t) \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ *et*

$$\mathrm{TV}(u(t)) \leq \mathrm{TV}(u_0) e^{\kappa_0 t} + NW_N \int_0^t e^{\kappa_0 (t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla_x (F - \mathrm{div} f)(\tau, x, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \,.$$

(H1) : $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla_x (F - \mathrm{div} f) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x \mathrm{d}t < \infty$ et $\nabla_x \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$

Remarque : On retrouve des estimations connues dans les cas particuliers

- f, F ne dépendent que de u,
- f, F ne dépendent pas de u.

Estimation de la variation totale (R.M. Colombo, M.M., M.D. Rosini)

Théorème (TV)

Supposons (f,F) *vérifient* ***(K)*** $+$ ***(H1)***. *Soit* $\kappa_0 = NW_N\left((2N+1)\|\nabla_x \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}\right)$. *Si* $u_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$, *alors* $\forall t \in [0,T]$, $u(t) \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ *et*

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}(u(t)) \leq & \mathrm{TV}(u_0) e^{\kappa_0 t} \\ & + NW_N \int_0^t e^{\kappa_0 (t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \left\|\nabla_x (F - \mathrm{div} f)(\tau, x, \cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \,.\end{aligned}$$

(H1) : $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\|\nabla_x (F - \mathrm{div} f)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x \mathrm{d}t < \infty$ et $\nabla_x \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$

Remarque : On retrouve des estimations connues dans les cas particuliers

- f, F ne dépendent que de u,
- f, F ne dépendent pas de u.

Estimation de la variation totale (R.M. Colombo, M.M., M.D. Rosini)

Théorème (TV)

Supposons (f, F) *vérifient* ***(K)*** $+$ ***(H1)***. *Soit*
$\kappa_0 = N W_N \left((2N+1) \|\nabla_x \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} \right)$. *Si*
$u_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, *alors* $\forall t \in [0, T]$, $u(t) \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ *et*

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}(u(t)) \leq & \mathrm{TV}(u_0) e^{\kappa_0 t} \\ & + N W_N \int_0^t e^{\kappa_0 (t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla_x (F - \mathrm{div} f)(\tau, x, \cdot) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \,.\end{aligned}$$

(H1) : $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla_x (F - \mathrm{div} f) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x \mathrm{d}t < \infty$ et $\nabla_x \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$

Remarque : On retrouve des estimations connues dans les cas particuliers

- f, F ne dépendent que de u,
- f, F ne dépendent pas de u.

Idée de preuve :

Proposition

Soit $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ *telle que* $\|\mu\|_{L^1} = 1$ *et* $\mu' < 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *On pose* $\mu_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^N}\mu\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right)$. *Si il existe* $C_0 > 0$ *tel que* $\forall \lambda > 0$,

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \left|u(x+y) - u(x)\right|\mu_\lambda(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C_0,$$

alors $u \in \mathbf{BV}$ *et*

$$\mathrm{TV}(u)\int_{\mathbb{R}^N} |y_1|\mu(\|y\|)\mathrm{d}y \leq C_0.$$

On introduit

$$\mathcal{F}(T,\lambda) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x_0,R+M(T_0-t))} \left|u(x+y) - u(x)\right|\mu_\lambda(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

Idée de preuve :

Proposition

Soit $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ *telle que* $\|\mu\|_{\mathbf{L}^1} = 1$ *et* $\mu' < 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *On pose* $\mu_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^N}\mu\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right)$. *Si il existe* $C_0 > 0$ *tel que* $\forall \lambda > 0$,

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|u(x+y)-u(x)\right|\mu_\lambda(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C_0,$$

alors $u \in \mathbf{BV}$ *et*

$$\mathrm{TV}(u)\int_{\mathbb{R}^N}|y_1|\mu(\|y\|)\mathrm{d}y \leq C_0.$$

On introduit

$$\mathcal{F}(T,\lambda) = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x_0,R+M(T_0-t))}\left|u(x+y)-u(x)\right|\mu_\lambda(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

La méthode de doublement des variables donne l'estimation :

$$\partial_T \mathcal{F}(T,\lambda) \leq \partial_T \mathcal{F}(0,\lambda) + C\lambda\partial_\lambda \mathcal{F}(T,\lambda) + C'\mathcal{F}(T,\lambda) + \lambda \int_0^T A(t)\mathrm{d}t\,,$$

où $A(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \left\|\nabla(F - \mathrm{div} f)(t,x\cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}$.
On intégre en temps et on divise par $CT\lambda$:

$$0 \leq \frac{1}{C\lambda}\mathcal{F}(0,\lambda) + \partial_\lambda \mathcal{F}(T,\lambda) + \frac{\alpha(T)}{\lambda}\mathcal{F}(T,\lambda) + \frac{1}{C}\int_0^T A(t)\mathrm{d}t\,,$$

où $\alpha(T) = N + C'/C - 1/T \to -\infty$ quand $T \to 0$. On choisit T assez petit et on intègre sur $[\lambda, +\infty[$. On obtient

$$\mathcal{F}(T,\lambda) \leq \frac{\lambda}{\alpha - 1} K\mathrm{TV}(u_0) + \frac{\lambda}{C(\alpha - 1)}\int_0^T A(t)\mathrm{d}t\,.$$

Plan

1. Stabilité $\mathbf{L}^1$ par rapport au flux et à la source
   - Résultats existants
   - Estimation de la variation totale
   - Dépendance par rapport au flux et à la source
2. Existence de solutions pour f, F non-locales
   - Trafic piéton
   - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Dépendance par rapport au flux et à la source

Théorème (Flux/Source)

Supposons que $(f,F),(g,G)$ *vérifient* ***(K)***, (f,F) *vérifie* ***(H1)*** *et* $(f-g,F-G)$ *vérifie* ***(H2)***. *Soient* $u_0, v_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$. *On note*

$$\kappa = 2N\|\nabla_x \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \left\|\partial_u(F-G)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}.$$

Soient u *et* v *les solutions associées respectivement aux flux et sources* (f,F) *et* (g,G) *et aux conditions initiales* (u_0,v_0).

(H2) : $\partial_u(F-G) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$, $\partial_u(f-g) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$ et $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\|F-G-\mathrm{div}(f-g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty$.

Dépendance par rapport au flux et à la source

Théorème (Flux/Source)

*Supposons que $(f, F), (g, G)$ vérifient **(K)**, (f, F) vérifie **(H1)** et $(f - g, F - G)$ vérifie **(H2)**. Soient $u_0, v_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. On note*

$$\kappa = 2N \|\nabla_x \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \left\|\partial_u (F - G)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}.$$

Soient u et v les solutions associées respectivement aux flux et sources (f, F) et (g, G) et aux conditions initiales (u_0, v_0).

(H2) : $\partial_u (F - G) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$, $\partial_u (f - g) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$ et $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\|F - G - \mathrm{div}(f - g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty$.

Théorème (Flux/Source, suite)

alors $\forall t \in [0, T]$:

$$\left\|(u-v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\kappa t}\left\|u_0 - v_0\right\|_{\mathbf{L}^1} + \frac{e^{\kappa_0 t} - e^{\kappa t}}{\kappa_0 - \kappa}\mathrm{TV}(u_0)\left\|\partial_u(f-g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}$$
$$+ \int_0^t \frac{e^{\kappa_0(t-\tau)} - e^{\kappa(t-\tau)}}{\kappa_0 - \kappa}\int_{\mathbb{R}^N}\left\|\nabla_x(F - \mathrm{div} f)(\tau, x, \cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$
$$\times NW_N\left\|\partial_u(f-g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}$$
$$+ \int_0^t e^{\kappa(t-\tau)}\int_{\mathbb{R}^N}\left\|((F-G) - \mathrm{div}(f-g))(\tau, x, \cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\,.$$

Remarque : De même que pour le Théorème (TV), on retrouve des estimations connues pour des cas particuliers

- si f, g ne dépendent que de u, $F = G = 0$,
- si f, g, F, G ne dépendent pas de u.

Théorème (Flux/Source, suite)

alors $\forall t \in [0, T]$:

$$\left\|(u-v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\kappa t}\left\|u_0 - v_0\right\|_{\mathbf{L}^1} + \frac{e^{\kappa_0 t} - e^{\kappa t}}{\kappa_0 - \kappa}\mathrm{TV}(u_0)\left\|\partial_u(f-g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}$$
$$+ \int_0^t \frac{e^{\kappa_0(t-\tau)} - e^{\kappa(t-\tau)}}{\kappa_0 - \kappa}\int_{\mathbb{R}^N}\left\|\nabla_x(F - \mathrm{div} f)(\tau, x, \cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$
$$\times NW_N\left\|\partial_u(f-g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}$$
$$+ \int_0^t e^{\kappa(t-\tau)}\int_{\mathbb{R}^N}\left\|((F-G) - \mathrm{div}(f-g))(\tau, x, \cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\,.$$

Remarque : De même que pour le Théorème (TV), on retrouve des estimations connues pour des cas particuliers

- si f, g ne dépendent que de u, $F = G = 0$,
- si f, g, F, G ne dépendent pas de u.

Plan

Trafic piéton (R.M. Colombo, M. Herty, M.M.)

On considère maintenant des équations du type

$$\partial_t u + \mathrm{Div}(uV(u)) = 0\,; \quad u_0 \in (\mathbf{L^1} \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$$

où $V : \mathbf{L^1} \to \mathcal{C}^2$ est une fonctionnelle non-locale régularisante.

Existence d'une solution

Théorème (Trafic)

*Si V satisfait **(V1)**, alors il existe un $T_{ex} > 0$ et une unique solution entropique $u \in \mathcal{C}^0([0, T_{ex}[; \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})$ et on note $S_t u_0 = u(t, \cdot)$. On peut minorer le temps d'existence par*

$$T_{ex} = \sup \left\{ \sum_n \frac{\ln(\alpha_{n+1}/\alpha_n)}{C(\alpha_{n+1})} \, ; \, (\alpha_n)_n \text{ strict. croissante}, \, \alpha_0 = \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \right\}.$$

*Si de plus, V satisfait **(V2)** alors*

$$u_0 \in \mathbf{W}^{2,1} \cap \mathbf{L}^\infty \Rightarrow \forall t \in [0, T_{ex}[, \quad u(t) \in \mathbf{W}^{2,1} .$$

La preuve se base sur un point fixe + lemme de représentation des solutions d'une équation de transport.

Hypothèses

(V1) Il existe $C \in \mathbf{L}^{\infty}_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall u \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$

$$V(u) \in \mathbf{L}^{\infty}, \qquad \left\|\nabla_x V(u)\right\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^{\infty}}),$$
$$\left\|\nabla_x V(u)\right\|_{\mathbf{L}^{1}} \leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^{\infty}}), \qquad \left\|\nabla_x^2 V(u)\right\|_{\mathbf{L}^{1}} \leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^{\infty}}),$$

et $\forall u_1, u_2 \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$

$$\left\|V(u_1) - V(u_2)\right\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \leq C(\|u_1\|_{\mathbf{L}^{\infty}})\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^{1}},$$
$$\left\|\nabla_x(V(u_1) - V(u_2))\right\|_{\mathbf{L}^{1}} \leq C(\|u_1\|_{\mathbf{L}^{\infty}})\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^{1}}.$$

(V2) il existe $C \in \mathbf{L}^{\infty}_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ telle que $\left\|\nabla_x^3 V(u)\right\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^{\infty}})$.

Idée de preuve :
Soient $\beta > \alpha > 0$ et $T \leq T_* = \frac{\ln(\beta/\alpha)}{C(\beta)}$. On introduit l'espace $X_\alpha = \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$ et l'application $\mathcal{Q}$ qui associe à $w \in \mathcal{X}_\beta = \mathcal{C}^0([0, T[, X_\beta)$ associe la solution $u \in \mathcal{X}_\beta$ du problème

$$\partial_t u + \mathrm{Div}(uV(w)) = 0\,, \quad u(0, \cdot) = u_0 \in X_\alpha$$

Pour w_1, w_2, on obtient par l'estimation du Thm (Flux/Source)

$$\left\| \mathcal{Q}(w_1) - \mathcal{Q}(w_2) \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)} \leq f(T) \| w_1 - w_2 \|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)}\,,$$

où f est croissante, $f(0) = 0$ et $f \to_{T \to \infty} \infty$
On applique ensuite le théorème du point fixe.

Idée de preuve :
Soient $\beta > \alpha > 0$ et $T \leq T_* = \frac{\ln(\beta/\alpha)}{C(\beta)}$. On introduit l'espace $X_\alpha = \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$ et l'application $\mathcal{Q}$ qui associe à $w \in \mathcal{X}_\beta = \mathcal{C}^0([0, T[, X_\beta)$ associe la solution $u \in \mathcal{X}_\beta$ du problème

$$\partial_t u + \mathrm{Div}(uV(w)) = 0\,, \quad u(0, \cdot) = u_0 \in X_\alpha$$

Pour w_1, w_2, on obtient par l'estimation du Thm (Flux/Source)

$$\left\| \mathcal{Q}(w_1) - \mathcal{Q}(w_2) \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)} \leq f(T) \| w_1 - w_2 \|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)}\,,$$

où f est croissante, $f(0) = 0$ et $f \to_{T \to \infty} \infty$
On applique ensuite le théorème du point fixe.

Plan

Définition : On dit que l'application $S : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}) \to \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ est $\mathbf{L}^1$ *Gâteaux différentiable en* $u_0 \in \mathbf{L}^1$ *dans la direction* $r_0 \in \mathbf{L}^1$ s'il existe une application linéaire continue $DS(u_0) : \mathbf{L}^1 \to \mathbf{L}^1$ telle que

$$\left\| \frac{S(u_0 + hr_0) - S(u_0)}{h} - DS(u_0)(r_0) \right\|_{\mathbf{L}^1} \to_{h \to 0} 0\,.$$

On veut montrer que le semi-groupe local donnant la solution de l'équation de trafic piéton est $\mathbf{L}^1$ Gâteaux différentiable. On s'attend à ce que la dérivée de Gâteaux soit la solution du problème linéarisé :

$$\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0\,, \quad r(0,\cdot) = r_0\,.$$

Définition : On dit que l'application $S : \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}) \to \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ est $\mathbf{L^1}$ *Gâteaux différentiable en* $u_0 \in \mathbf{L^1}$ *dans la direction* $r_0 \in \mathbf{L^1}$ s'il existe une application linéaire continue $DS(u_0) : \mathbf{L^1} \to \mathbf{L^1}$ telle que

$$\left\| \frac{S(u_0 + hr_0) - S(u_0)}{h} - DS(u_0)(r_0) \right\|_{\mathbf{L^1}} \to_{h\to 0} 0\,.$$

On veut montrer que le semi-groupe local donnant la solution de l'équation de trafic piéton est $\mathbf{L^1}$ Gâteaux différentiable. On s'attend à ce que la dérivée de Gâteaux soit la solution du problème linéarisé :

$$\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0\,, \quad r(0,\cdot) = r_0\,.$$

On introduit les jeux d'hypothèses :
(V3) $V : \mathbf{L}^1 \to \mathcal{C}^2$ est Fréchet différentiable et il existe $C \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbf{loc}}$ tel que $\forall u, r \in \mathbf{L}^1$,

$$\left\| V(u+r) - V(u) - DV(u)(r) \right\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \leq C\left(\|u\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u+r\|_{\mathbf{L}^\infty}\right) \|r\|^2_{\mathbf{L}^1},$$
$$\left\| DV(u)(r) \right\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} \leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|r\|_{\mathbf{L}^1}.$$

(V4) Il existe $C \in \mathbf{L}^\infty_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall u, \tilde{u}, r \in \mathbf{L}^1$

$$\left\| \mathrm{div}\left(V(\tilde{u}) - V(u) - DV(u)(\tilde{u}-u)\right) \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq C(\|\tilde{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u\|_{\mathbf{L}^\infty})(\|\tilde{u}-u\|_{\mathbf{L}^1})^2$$
$$\left\| \mathrm{div}\left(DV(u)(r)\right) \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|r\|_{\mathbf{L}^1}.$$

Théorème (Gâteaux dérivée faible)

*On suppose que V satisfait **(V1)** et **(V3)**. Soit $u_0 \in \mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{1,1}$ et $T_{ex} > 0$ le temps d'existence de la solution obtenue par le Théorème (Trafic). Alors, $\forall t \in [0, T_{ex}[$, $\forall r_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV}$ et pour toute suite (h_n) convergeant vers 0, il existe une sous-suite à*

$$\frac{S_t(u_0 + h_n r_0) - S_t(u_0)}{h_n}$$

qui converge faiblement dans $\mathbf{L}^1$ vers une solution faible de l'équation linéarisée.

Outils : Théorème de Dunford-Pettis pour $\left(\frac{u_h - u}{h}\right)_h$, borné dans $\mathbf{L}^1$, grâce au Thm (Flux/Source) + définition solutions faibles.
Problèmes : 'dérivée de Gâteaux $\mathbf{L}^1$ *faible*' ; pas d'unicité de la limite.

On montre que le problème linéarisé admet une unique solution entropique :

Théorème (Linéarisé)

*Supposons que V satisfait **(V1), (V2), (V3)**. Soit $u \in \mathcal{C}^0([0, T_{ex}[; \mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{1,1})$, $r_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Alors, le problème linéarisé*

$$\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0\,, \qquad avec\ r(0,x) = r_0$$

admet une unique solution entropique $r \in \mathcal{C}^0([0, T_{ex}[; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ et on note alors $\Sigma_t^u r_0 = r(t, \cdot)$.
Si de plus $r_0 \in \mathbf{W}^{1,1}$, alors $\forall t \in [0, T_{ex}[$, $r(t) \in \mathbf{W}^{1,1}$.

Théorème (Gâteaux Dérivée)

*Supposons que V satisfait **(V1),(V2),(V3),(V4)**. Soit $u_0 \in \mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1}$, $r_0 \in \mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty$ et soit T_{ex} le temps d'existence pour le problème initial donné par le théorème (Trafic). Alors, pour tout $t \in [0, T_{ex}[$ le semi-groupe local du problème de trafic piéton est $\mathbf{L}^1$ Gâteaux différentiable dans la direction r_0 et*

$$DS_t(u_0)(r_0) = \Sigma_t^{S_t u_0} r_0 \,.$$

Idée de preuve : utilisation du Théorème (Flux/Source) pour comparer la solution de condition initiale $u_0 + hr_0$ à la solution $u + hr$.

Soient u, u_h les solutions du problème $\partial_t u + \mathrm{Div}(uV(u)) = 0$ avec conditions initiales $u_0, u_0 + hr_0$. Soit r la solution du problème linéarisé $\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0$, $r(0) = r_0$ et soit $z_h = u + hr$ qui vérifie alors

$$\partial_t z_h + \mathrm{Div}\left(z_h(V(u) + hDV(u)(r))\right) = h^2 \mathrm{Div}(rDV(u)(r)), \quad z_h(0) = u_0 + hr_0 .$$

On utilise ensuite le Thm (Flux/Source) pour comparer u_h et z_h. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\|u_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)} \leq & F(T)\left(\frac{1}{h}\|u_h - u\|^2_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)} + \frac{1}{h}\|u_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)}\right) \\ & + hC(\beta)Te^{C(\beta)T}\|r\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{W}^{1,1})}\|r\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)},\end{aligned}$$

avec F croissante et $F(0) = 0$.

Soient u, u_h les solutions du problème $\partial_t u + \mathrm{Div}(uV(u)) = 0$ avec conditions initiales $u_0, u_0 + hr_0$. Soit r la solution du problème linéarisé $\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0$, $r(0) = r_0$ et soit $z_h = u + hr$ qui vérifie alors

$$\partial_t z_h + \mathrm{Div}\left(z_h(V(u) + hDV(u)(r))\right) = h^2 \mathrm{Div}(rDV(u)(r))\,, \quad z_h(0) = u_0 + hr_0\,.$$

On utilise ensuite le Thm (Flux/Source) pour comparer u_h et z_h. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\|u_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)} \leq & F(T)\left(\frac{1}{h}\|u_h - u\|^2_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)} + \frac{1}{h}\|u_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)}\right) \\ & + hC(\beta)Te^{C(\beta)T}\|r\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{W}^{1,1})}\|r\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)}\,,\end{aligned}$$

avec F croissante et $F(0) = 0$.

Références :

- Bouchut, F. and Perthame, B., Kružkov's estimates for scalar conservation laws revisited, Trans. Amer. Math. Soc., 1998
- Chen, G.-Q. and Karlsen, K. H., Quasilinear anisotropic degenerate parabolic equations with time-space dependent diffusion coefficients, Commun. Pure Appl. Anal., 2005
- Colombo, R. M. and M. M. and Rosini, M.D., Stability and total Variation Estimates on General Scalar Balance Laws, Communications in Mathematical Sciences, 2009
- Colombo, R. M. and Herty, M. and M. M., Control of the Continuity Equation with a Non-local Flow, submitted to Esaim-Cocv in 2009
- Kružkov, S. N., First order quasilinear equations with several independent variables. , Mat. Sb. (N.S.), 1970
- Lucier, B. J. , A moving mesh numerical method for hyperbolic conservation laws., Math. Comp. , 1986