Rapport de stage de fin de licence.
Stabilité d'ondes progressives d'un modèle de transition de phases

M.Mercier, sous la direction de J.M. Roquejoffre

11 septembre 2004

1 Intitulé

Le but de ce projet est l'étude d'une équation parabolique avec petits paramètres intervenant dans un modèle de transition de phases. Ce type de phénomènes est très étudié en physique des matériaux : phénomènes de solidification, d'évaporation, etc. et fait toujours l'objet d'intenses efforts de modélisation. Le projet proposé porte sur l'étude du modèle simple de solidification suivant : dans un milieu monodimensionnel —i.e. toutes les quantités ne dépendent que du temps et d'une seule coordonnée spatiale—, la proportion de la phase solide satisfait l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} + A\varepsilon^2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \phi(\phi-\theta)(1-\phi) = f(\phi)$$

où :
- θ est un paramètre mesurant la prédominance de la phase solide sur la phase liquide,
- ε est un petit paramètre correctif.

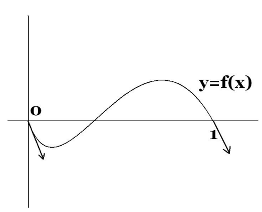
Un article datant d'une dizaine d'années de Gardner et Jones [3] étudie l'existence d'ondes progressives pour ce modèle (i.e. des solutions de la forme $\phi(x+ct)$) et leur stabilité —i.e. que se passe-t-il si l'on résout avec une donnée initiale proche d'un profil d'onde ?— Les méthodes utilisées pour la première partie utilisent une version géométrique d'une classe de théorèmes de variétés invariantes (théorèmes de persistance de Fenichel) ; pour la deuxième partie les méthodes utilisées sont des méthodes topologiques relativement élaborées. Il se trouve que la démonstration de Gardner et Jones peut être très simplifiée par l'emploi de méthodes d'équations aux dérivées partielles. Le projet consistera donc à étudier ce système avec des méthodes analytiques.

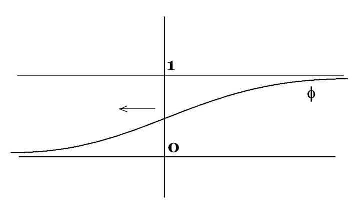
On considère l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} P\left(\frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi = f(\phi) \qquad (1)$$

où

$$P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{2k},\ a_1 > 0,\ a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x(1-x)(x-\theta)$$





Le but est de démontrer le théorème :

Théorème 1.1 *On suppose que P n'admet que deux racines réelles, à savoir deux fois la valeur zéro. Pour faciliter la démonstration, on suppose de plus que les racines non-nulles de P sont deux à deux distinctes. L'équation (1) admet alors un unique profil d'onde progressive qui de plus est stable.*

2 Existence d'une onde progressive

On sait que pour $\varepsilon = 0$, l'équation (1) admet une unique solution sous forme d'onde progressive qui tend vers 0 quand $x \to -\infty$ et vers 1 quand $x \to +\infty$, à translation près (cf. [6]). C'est à dire qu'il existe un unique couple (c_0, ϕ_0) tel que toute solution onde progressive ψ s'écrive :

$$\psi(x,t) = \phi_0(x - x_0 + c_0 t)$$

On cherche alors une solution sous forme d'onde progressive pour le système perturbé : $\phi(x,t) \;=\; \phi(x+ct)$.
On obtient, en posant $\xi = x + ct$:

$$c\phi' + \frac{1}{\varepsilon^2} P\left(\frac{\varepsilon}{i}\frac{d}{d\xi}\right)\phi = f(\phi)$$

On pose : $u_1 = \phi$, $\dot{u}_1 = u_2$, $\dot{u}_2 = u_3$, $\varepsilon\dot{u}_3 = u_4$, $\ldots$, $\varepsilon\dot{u}_{2n-1} = u_{2n}$. L'équation s'écrit alors :

$$cu_2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(-1)^k u_{2k+1} + a_n(-1)^n \varepsilon\dot{u}_{2n} = f(u_1)$$

Soit $x := (u_3, u_4, \ldots, u_{2n})$ la variable rapide et $y := (u_1, u_2)$ la variable lente. On a le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon\dot{x} = p(x,y,\varepsilon) \\ \dot{y} = q(x,y,\varepsilon) \end{array}\right. \tag{2}$$

auquel on voudrait appliquer le théorème de variété invariante de Fenichel :

Théorème 2.1 (variété invariante de Fenichel (cf. [5])) *Soit M_0 la variété critique qui correspond à l'ensemble des solutions du système (2) pour $\varepsilon = 0$. On suppose que M_0 est normalement hyperbolique par rapport au système dit "rapide" :*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = p(x,y,0) \\ y' = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Cela signifie que le système (3) linéarisé admet exactement 2 valeurs propres sur l'axe imaginaire, la variable lente étant de dimension 2.
Alors, pour $\varepsilon > 0$ pris assez petit, il existe une variété M_ε telle que :
- $d(M_0, M_\varepsilon) = O(\varepsilon)$
- *M_ε est difféomorphe à M_0*
- *M_ε est invariant sous le flot du système (2).*

Par conséquent, il faut tout d'abord s'intéresser à la variété critique M_0.

Variété critique

Quand $\varepsilon = 0$, le système (2) devient :

$$\left\{\begin{array}{l} u_4 = u_5 = \cdots = u_{2n} = 0 \\ cu_2 - a_1 u_3 = f(u_1) \\ u_1 = \phi,\; u_2 = \phi',\; u_3 = \phi'' \end{array}\right.$$

Les valeurs propres du système (3) linéarisé sont celles de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 \\ * & * & \frac{-a_1}{(-1)^{n+1}a_n} & 0 & \ldots & \frac{(-1)^{n-1}a_{n-1}}{(-1)^{n+1}a_n} & 0 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est :

$$\chi_M = X^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k a_k}{(-1)^{n+1} a_n} X^{2k-2} - X^{2n-2} \right) = \frac{1}{(-1)^{n+1} a_n} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k X^{2k} \right)$$

Et $\chi_M(ix) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$.
Ainsi les valeurs propres ne sont pas imaginaires pures, hormis deux d'entre elles si et seulement si P n'a que deux racines réelles, à savoir deux fois zéro. On suppose désormais que cette hypothèse est vérifiée.

On peut alors appliquer le théorème de Fenichel : sur M_0, $\exists\ h \in C^\infty$ telle que $x = h(y)$. En effet : $(u_3, \dots, u_{2n}) = (\frac{cu_2 - f(u_1)}{a_1}, 0, \dots, 0)$.
Pour ε assez petit, il existe donc M_ε, invariant sous le flot de (2), difféomorphe à M_0 tel que $d(M_0, M_\varepsilon) = O(\varepsilon)$. De plus, sur M_ε, on a :

$$x = h_\varepsilon(y) = h(y) + \varepsilon h_1(y)$$

Avec h_ε, h_1 de classe C^∞.
Cela revient à dire que, sur M_ε : $(u_3, \dots, u_{2n}) = (\frac{cu_2 - f(u_1)}{a_1}, 0, \dots, 0) + \varepsilon h_1(u_1, u_2)$.
En particulier : $u_3 = \frac{cu_2 - f(u_1)}{a_1} + \varepsilon h_{1,3}(u_1, u_2)$ avec $h_{1,3}$ de classe C^∞. Comme $u_1 = \phi$, $u_2 = \phi'$, $u_3 = \phi''$, l'équation devient alors :

$$a_1 \phi'' = c\phi' - f(\phi) + \varepsilon h_{1,3}(\phi, \phi')$$

Ainsi on a ramené le problème de perturbation singulière avec des dérivées 2n$^{\text{ème}}$ à un problème de perturbation non-singulière : il faut désormais s'intéresser à une équation différentielle non-linéaire de degré deux.

Connaissant (c_0, ϕ_0), solution du système non-perturbé ; quand $\varepsilon \neq 0$, on va chercher une solution sous forme de perturbation :

$$\begin{cases} \phi = \phi_0 + \varepsilon\psi \\ c = c_0 + \varepsilon d \end{cases}$$

Les conditions aux limites donnent de plus : $\psi(-\infty) = \psi(+\infty) = 0$.
Et on peut imposer par translation : $\psi(0) = 0$.
En reportant dans l'équation, on trouve :

$$\underbrace{-a_1\psi'' + c_0\psi' - f'(\phi_0)\psi}_{:=L\psi} + d\phi_0' = \frac{1}{2}\varepsilon\psi^2 f''(\phi_0) + \varepsilon d\psi' + \tilde{h}(\psi, \psi') = H(\psi, \psi')$$

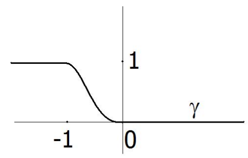
On est donc amené à étudier l'opérateur linéaire L. On cherche en particulier à le mettre sous la forme $T + K$, où T est un isomorphisme et KT^{-1} un opérateur compact, ceci afin de pouvoir appliquer le théorème de l'alternative de Fredholm (cf. [2]) :

Théorème 2.2 (Alternative de Fredholm) *Soit E un espace vectoriel et $k : E \to E$ un opérateur compact. On a alors :*
- *$N(I + k)$ est de dimension finie.*
- *$R(I + k)$ est fermé et $R(I + k) = N(I + k^*)^\perp$.*
- *$N(I + k) = \{0\} \Leftrightarrow R(I + k) = E$*
- *$\dim N(I + k) = \dim N(I + k^*)$.*

On se place sur l'espace vectoriel $UC_b(\mathbb{R})$ des fonctions uniformément continues et bornées et on pose :

$$T\psi = -a_1\psi'' + c_0\psi' - (f'(0)\gamma + (1 - \gamma)f'(1))\psi$$

où γ est une fonction C^∞ égale à 1 sur $[-\infty, -1]$ et à 0 sur $[0, +\infty]$.



T est alors un isomorphisme car :

$$-(\gamma f'(0) + (1-\gamma)f'(1)) \geq \min(-f'(0), -f'(1)) \ > \ 0$$

Soit alors $K := L - T$. On a : $K\psi = (-f'(\phi_0) + \gamma f'(0) + (1-\gamma)f'(1))\psi$,
et $-f'(\phi_0) + \gamma f'(0) + (1-\gamma)f'(1) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.
Ceci permet de montrer que KT^{-1} est compact (cf. [6]).
D'autre part, on pose e^* tel que : $\langle e^*, u\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c_0 x/a_1}\phi_0'(x)u(x)dx$.
e^* est alors dans $N(L^*)$ car $\forall\ u\ \in E$, $\langle L^*e^*, u\rangle = \langle e^*, Lu\rangle = 0$. Et comme :
$\langle e^*, \phi_0'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c_0 x/a_1}\phi_0'(x)^2 dx\ >\ 0$, on peut normer e^* de sorte que $\langle e^*, \phi_0'\rangle = 1$.
Or, ici, $N(L) = Vect(\phi_0')$. Donc, d'après l'alternative de Fredholm : $N(L^*) = Vect(e^*)$ et le projecteur sur $R(L)$ est :

$$\pi : [u \mapsto u - \langle e^*, u\rangle\, \phi_0']$$

De plus, L et π commutent.
On peut alors décomposer toute fonction u sous la forme :

$$u = \underbrace{\pi(u)}_{\in R(L)} + \underbrace{\langle e^*, u\rangle\, \phi_0'}_{\in N(L)}$$

Ce qui permet de voir que L réalise un isomorphisme sur son image, puisqu'on a la somme directe : $E = R(L) \bigoplus N(L)$.

On réécrit l'équation : $L\psi = H(\psi, \psi') - d\phi_0'$.
En appliquant π, ou e^*, ou en prenant la valeur en zéro, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\pi(\psi)) = \pi(H(\psi, \psi')) \\ d = \langle e^*, H(\psi, \psi')\rangle \\ \langle e^*, \psi\rangle = -\frac{\pi(\psi)(0)}{\phi_0'(0)} \end{array} \right. \tag{4}$$

Pour trouver une solution à ce système, on y substitue les ψ par des χ dans le membre de droite et on voudrait appliquer le théorème des fonctions implicites.
Comme L est un isomorphisme sur son image, on peut trouver $\tilde{\psi} \in R(L)$ tel que $L\tilde{\psi} = \pi(H(\chi, \chi'))$.
On a d'autre part : $d = \langle e^*, H(\chi, \chi')\rangle$.
Connaissant $\tilde{\psi}$, on connaît alors $\langle e^*, \psi\rangle = -\frac{\tilde{\psi}(0)}{\phi_0'(0)}$.
Ainsi on trouve une unique solution au système, à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_H(\chi) = \tilde{\psi} + \langle e^*, \psi\rangle\, \phi_0' \\ d_H(\chi) = \langle e^*, H(\chi, \chi')\rangle \end{array} \right.$$

On considère alors l'application :

$$F : (H, \chi, \delta) \longmapsto (\chi - \psi_H(\chi), \delta - d_H(\chi))$$

qui est une application C^1 telle que $F(H, \chi, \delta) = (0,0) \Leftrightarrow \chi = \psi_H(\chi), \delta = d_H(\chi)$.
De plus, $DF_{\chi,\delta}(0,0,0) = id$ est un isomorphisme. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe U voisinage de 0, V, voisinage de 0 dans $UC_b(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, Φ difféomorphisme de U dans V tel que, pour $H \in U$, on ait :

$$F(H, \Phi(H)) = F(H, \chi(H), \delta(H)) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi(H) = \psi_H(\chi(H)) \\ \delta(H) = d_H(\chi(H)) \end{array} \right.$$

Et on a trouvé une solution au système (4), ce qui montre l'existence d'une solution au système perturbé.

3 Stabilité de l'onde progressive

Définition

Une onde progressive $\tilde{u}$ est dite asymptotiquement stable si $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall u_0 \in E$:

$$||u_0 - \tilde{u}||_\infty < \varepsilon \Rightarrow \exists\, k \text{ tel que } ||u(x,t) - \tilde{u}(x - ct + k)||_\infty \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$

o u est la solution telle que $u(t = 0) = u_0$.

3.1 Système non-perturbé

Pour $\varepsilon = 0$, l'équation (1) s'écrit :

$$\partial_t u - a_1 \partial_{xx} u = f(u)$$

Si on pose : $\xi = x + ct$, l'équation devient :

$$\partial_t u + c\partial_\xi v - a_1 \partial_{xx} u = f(u)$$

On s'intéresse au voisinage de la solution onde progressive, on pose donc : $u := v + \phi_0$. En reportant, il vient :

$$\partial_t v + \underbrace{c\partial_\xi v - a_1 \partial_{\xi\xi} v - f'(\phi_0)v}_{=:Lv} = g(v)$$

où $g/v \to 0$ quand $v \to 0$.
On s'intéresse alors au spectre de L afin de pouvoir appliquer le théorème de stabilité asymptotique :

Théorème 3.1 (stabilité asymptotique(cf. [4])) *On considère l'équation, sur X, espace de Banach :*

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u)$$

dont u_0 est un point d'équilibre.
On suppose que f est localement lipschitzienne en u et que : $f(u_0+v) = f(u_0)+Bv+g(v)$, où B est un opérateur linéaire borné et $||g(v)|| = o\,(||v||)$. Si le système différentiel linéarisé : $\frac{dv}{dt} + Av = Bv$ est asymptotiquement stable, alors u_0 est asymptotiquement stable pour l'équation originelle.

On a même, si $\sigma(A - B) \subset \{\lambda;\ \mathrm{Re}\lambda \geq \beta > 0\}$, alors il existe ρ, M, tels que :

$$||u_1 - u_0|| \leq \frac{\rho}{M} \Rightarrow ||\tilde{u} - u_0|| \leq Me^{-\beta t}||u_1 - u_0||$$

où $\tilde{u}$ est l'unique solution de $\frac{du}{dt} + Au = f(u)$ telle que $\tilde{u}(0, .) = u_1$, qui existe bien.

Localisation du spectre de $L = A - B$

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ et v, une fonction bornée non-nulle telle que : $Lv = \lambda v$.
Comme $f'(\phi_0)$ admet des limites strictement négatives en $\pm\infty$, et qu'on sait que les solutions d'une équation linéaire à coefficients variables dont les coefficients admettent des limites finies en $\pm\infty$ ont le même comportement asymptotique que les solutions des équations aux limites, on a au moins : $v(\xi) = O(e^{-c|\xi|/a_1})$ en $\pm\infty$.
On pose : $w(\xi) = v(\xi)e^{-\frac{c\xi}{2a_1}}$. Alors $w(\xi) = O(e^{-\frac{c|\xi|}{2a_1}})$ et w vérifie l'équation symétrisée :

$$w'' + \frac{1}{a_1}\left(\lambda - \frac{c^2}{4a_1} + f'(\phi_0(\xi))\right) w = 0$$

On est ainsi ramené à un problème auto-adjoint dans $L_2(\mathbb{R})$; on en déduit donc que les valeurs propres sont réelles et on peut supposer w réelle, en considérant séparément les parties réelles et

imaginaires, qui vérifient alors la même équation.
On prend w de norme gale 1 dans L_2, alors :

$$\lambda = a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} w'^2 - \frac{1}{a_1}\left(f'(\phi_0) - \frac{c^2}{4a_1}\right) w^2$$

Lorsque w varie parmi les fonctions H_1 de norme 1 dans L_2, cette intégrale reste bornée supérieurement, puisque $f'(\phi_0)$ est bornée. Elle est aussi bornée inférieurement. Donc la borne inf existe ; en outre, il est possible d'extraire une sous-suite convergente d'une suite minimisante et cette sous-suite converge alors vers une fonction réalisant le minimum. Avec cette fonction on obtient la plus petite valeur propre. Or, si w réalise le minimum, alors $|w|$ aussi. On peut donc prendre $w \geq 0$.
En outre, si $\psi(\xi) = \phi_0'(\xi)e^{-\frac{c\xi}{2}}$, on a : $\frac{1}{a_1}\left(-\frac{c^2}{4a_1} + f'(\phi_0)\right) = -\frac{\psi''}{\psi}$ et $\psi > 0$. Donc, après intégration par partie, on obtient :

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 \left(\frac{d}{d\xi}\left(\frac{w}{\psi}\right)\right)^2 d\xi \geq 0$$

Alors $\lambda = 0$, donc $\frac{w}{\psi} = \frac{v}{\phi_0'} =$ cste. Et 0 est valeur propre simple ; $N(L) = Vect(\phi_0')$.
D'autre part, pour le spectre essentiel, on a par théorème (cf. [4]) :

$$\sigma_e(L) \subset \left\{\lambda \ ; \ \mathrm{Re}\lambda - \frac{(\mathrm{Im}\lambda)^2}{c^2} \geq \min(-f'(0); -f'(1)) > 0\right\}$$

Hormis 0, le spectre est donc dans $\{\lambda; \ \mathrm{Re}\lambda \geq \beta\}$, avec $\beta > 0$, car en-dehors du spectre essentiel, les valeurs propres sont isolées.
Ceci permet de voir que le système linéarisé est asymptotiquement stable :

Stabilité asymptotique du système linéarisé (cf. [4])

On considère la courbe $\{\hat{\phi}(k) = \phi_0(.+k) - \phi_0\}_{k\in\mathbf{R}}$ qui est telle que :
pour k proche de 0, $L\hat{\phi} = g(\hat{\phi})$; $L\hat{\phi}' = 0$; $\hat{\phi}(0) = 0$; $\hat{\phi}'(0) = \phi_0'$.
On a : $N(L) = Vect(\hat{\phi_0}')$. Soit u la solution de l'quation associe u_0, proche de ϕ_0. La décomposition de $v = u - \phi_0 \in C_0$ s'écrit donc, pour k proche de 0 :

$$u = \hat{\phi}(k) + y, \ y \in R(L)$$

Et on a :

$$\frac{du}{dt} = \frac{dk}{dt}\hat{\phi}'(k) + \frac{dy}{dt} = g(\hat{\phi}(k) + y) - L(\hat{\phi}(k) + y)$$

On peut de plus trouver $e^* \in N(L^*)$ tel que $\langle e^*, \phi_0' \rangle = 1$.
L'équation se dissocie alors en deux, en appliquant e^* et en projetant sur $R(L)$ par π, projecteur sur $R(L)$ paralllement $N(L)$:

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = \frac{\langle e^*, g(\hat{\phi}(k)+y) - g(\hat{\phi}(k))\rangle}{\langle e^*, \hat{\phi}'(k)\rangle} = a(k,y) \\ \frac{dy}{dt} + \pi L(y) = \pi\left(g(\hat{\phi}(k)+y) - g(\hat{\phi}(k)) - \hat{\phi}'(k)a(k,y)\right) = b(k,y) \end{cases}$$

Et $|a(k,y)| + ||b(k,y)|| \leq \gamma(||y|| + |k|)||y||$ où $\gamma(x) \to 0$ quand $x \to 0$.
On a de plus la condition initiale : à $t = 0$, $k = k_0$ et $y = y_0$.
Alors, comme $\sigma(\pi L) \subset \{\mathrm{Re}(\lambda) \geq \ \beta > 0\}$, on a d'après le théorème 3.1 :

$$\begin{aligned} |k(t)| < \delta \quad & \Rightarrow b(k,y) = O(||y||) \\ & \Rightarrow ||y(t)|| \leq Ke^{-\beta t}||y_0|| \\ & \Rightarrow |\tfrac{dk}{dt}| = O(e^{-\beta t}||y_0||) \\ & \Rightarrow \exists k_\infty \text{ tel que } |k(t) - k_\infty| + ||y(t)|| = O(e^{-\beta t}) \\ & \Rightarrow ||v - \hat{\phi}(k_\infty)|| = O(e^{-\beta t}) \\ & \Rightarrow ||u - \phi_0(.+k_\infty)|| = O(e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

Ainsi $\frac{du}{dt} + Lu = 0$ est asymptotiquement stable. Par le théorème 3.1, l'équation de départ est asymptotiquement stable.

3.2 Système perturbé

L'équation (1) devient, en posant $\xi = x + ct$ et en linéarisant près de ϕ_0 :

$$\partial_t u + cu' + \sum_{k=1}^{n} a_k(-1)^k \varepsilon^{2k-2} u^{(2k)} = f'(\phi_0)u$$

On pose donc : $L = cu' + \sum_{k=1}^{n} a_k(-1)^k \varepsilon^{2k-2} u^{(2k)} - f'(\phi_0)u$ et, de même que dans le cas non-perturbé, on recherche des informations sur le spectre de L, ce qui est un point crucial de la démonstration.

Localisation du spectre de L

On a, en utilisant l'égalité de Plancherel-Parseval :

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu) = \lambda ||u||^2 - 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(y)|^2 (iyc + \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon^{2k-2} y^{2k}) + \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 f'(\phi(x))dx$$

Où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u.
Si on considère séparément les parties réelle et imaginaire, on trouve :

$$\mathrm{Re}(\lambda)||u||^2 - \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} P(\varepsilon y)|\hat{u}(y)|^2 dy + \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 f'(\phi(x))dx = \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu)$$

$$\mathrm{Im}(\lambda)||u||^2 - 2\pi c \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(y)|^2 y dy = \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu)$$

Or, par hypothèse P n'a que deux racines réelles, à savoir deux zéros et $a_1 > 0$, donc $\exists K > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Kx^2 \leq P(x)$. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} K\varepsilon^2 y^2 |\hat{u}(y)|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}} P(\varepsilon y)|\hat{u}(y)|^2 dy$$

D'autre part : $\left(\int_{\mathbb{R}} y|\hat{u}(y)|^2 dy\right)^2 \leq ||\hat{u}||^2 \int_{\mathbb{R}} y^2 |\hat{u}(y)|^2 dy$. D'où :

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Im}(\lambda)||u||^2\right)^2 &\leq 2\left(\mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu)\right)^2 + 8\pi^2 c^2 \left(\int_{\mathbb{R}} y|\hat{u}(y)|^2 dy\right)^2 \\
&\leq 2\left(\mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu)\right)^2 + 8\pi^2 c^2 ||\hat{u}||^2 \int_{\mathbb{R}} y^2 |\hat{u}(y)|^2 dy \\
&\leq 2\left(\mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu)\right)^2 + \frac{8\pi^2 c^2}{\varepsilon^2 K} ||\hat{u}||^2 \int_{\mathbb{R}} P(\varepsilon y)|\hat{u}(y)|^2 dy
\end{aligned}$$

$$= 2\left(\mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu)\right)^2 + \frac{8\pi^2 c^2}{\varepsilon^2 K} ||\hat{u}||^2 \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left(\mathrm{Re}(\lambda)||u||^2 + \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 f'(\phi(x))dx - \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu)\right)$$

D'autre part, $\mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(\lambda u - Lu) \leq ||u||.||Lu - \lambda u||$.
De même pour la partie imaginaire. On obtient donc :

$$\mathrm{Im}(\lambda)^2 ||u||^4 \leq 2||u||^2 ||Lu - \lambda u||^2 + \frac{2c^2}{K} ||u||^2 \left(\mathrm{Re}(\lambda)||u||^2 + ||u||.||Lu - \lambda u|| + \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 f'(\phi(x))dx\right)$$

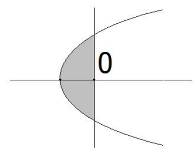
Et $Lu = \lambda u$ implique :

$$\mathrm{Im}(\lambda)^2 ||u||^4 \leq \frac{2c^2}{K} ||u||^2 \left(\mathrm{Re}(\lambda)||u||^2 + \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 f'(\phi(x))dx\right)$$

$$\text{i.e. } \forall\, \eta \geq \frac{2c^2}{K},\ \mathrm{Im}(\lambda)^2 - \eta\, \mathrm{Re}(\lambda) \leq \frac{2c^2}{K||u||^2} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 f'(\phi(x))dx$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\, \eta \geq \frac{2c^2}{K},\ \operatorname{Im}(\lambda)^2 - \eta \operatorname{Re}(\lambda) \leq \frac{2c^2}{K} \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 f'(\phi(x)) dx \ ;\ ||u||_{L_2} = 1 \right\}$$

Et le spectre est contenu dans une parabole tournée vers la droite, et l'ensemble des valeurs propres de partie réelle négative est borné par une constante C.



ηx=y² -C

Maintenant, on aimerait montrer que les valeurs propres de l'opérateur L, pour ε proche de 0 sont en fait de parties réelles positives. Pour cela, on va utiliser la fonction d'Evans qui est le déterminant d'une base de solutions du problème aux valeurs propres $Lu = \lambda u$, et qui a pour zéros les valeurs propres λ du système. Si il y a convergence vers la fonction d'Evans du système non-perturbé lorsque $\varepsilon \to 0$, on aura alors le résultat, puisque le système non-perturbé a ses valeurs propres de parties réelles positives. On cherche donc à approcher une base de solutions :

Base de solutions

On écrit l'équation sous forme de système différentiel de degré un en posant :

$$U := (u, u', u'', \ldots, u^{(2n)})$$

On a alors :

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\frac{(\lambda + f'(\phi))}{*} & \frac{c}{*} & \frac{-a_1}{*} & \ldots & \frac{(-1)^{n-1}\varepsilon^{2n-4}a_{n-1}}{*} & 0 \end{pmatrix} U$$

où $* = (-1)^{n+1}\varepsilon^{2n-2}a_n$.
Et le polynôme caractéristique de la matrice est :

$$Q = \frac{1}{(-1)^{n+1}\varepsilon^{2n-2}a_n}\left[cX - a_1X^2 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_k \varepsilon^{2k-2} X^{2k} - (\lambda + f'(\phi)) \right]$$

On effectue le changement de variable : $Y = \varepsilon X$, alors :

$$Q = \frac{1}{(-1)^{n+1}\varepsilon^{2n}a_n}\left[c\varepsilon Y - a_1Y^2 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_k Y^{2k} - \varepsilon^2(\lambda + f'(\phi)) \right]$$

Comme $P(X)$ n'admet que deux racines réelles, à savoir deux zéros, $P(iX)$ n'admet aucune racine imaginaire, hormis deux zéros. Pour ε assez petit, par perturbation d'une racine non-nulle de $P(iX)$, on obtient donc une racine non-imaginaire de Q, puisque dans le polynôme en Y, le terme dominant est $P(iY)$.
Ainsi, en Y on a $2n-2$ racines d'ordre 1, et deux racines d'ordre ε ; i.e. , en X, $2n-2$ racines d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ et deux racines d'ordre 1.

On cherche ensuite à déterminer une base de solutions du système. On effectue alors le changement de variable : $x = \varepsilon\xi$.

L'équation devient :

$$c\varepsilon u' - a_1 u'' + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_k u^{(2k)} - \varepsilon^2(\lambda + f'(\phi))u = 0$$

Ou bien, matriciellement :

$$U' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{a_1}{\maltese} & \dots \end{pmatrix}}_{=-A_0} U + \varepsilon \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ -\frac{\varepsilon(\lambda + f'(\phi_0))}{\maltese} & \frac{c}{\maltese} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B} U$$

où $\maltese = (-1)^{n+1} a_n$.
Les valeurs propres de A_0 sont alors les racines de $P(iX)$, qui sont deux à deux conjuguées et non-imaginaires, hormis deux zéros. On suppose de plus que les racines non-nulles sont deux à deux distinctes. Ce sont :

$$\underbrace{\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p}_{\text{Re}>0},\ 0,\ 0,\ \underbrace{\mu_{p+2}, \dots, \bar{\mu}_{n-1}}_{\text{Re}<0}$$

Avec Re $\mu_1 >$ Re $\mu_2 > \dots$ Re $\mu_p > 0 >$ Re $\mu_{p+2} > \dots >$ Re μ_{n-1}. Soit A_1 la sous-matrice de A_0 dont les valeurs propres sont les valeurs propres non-nulles de A_0. A_1 est alors diagonalisable, et on peut se placer dans une base de diagonalisation normée $(U_1, \bar{U}_1, \dots \bar{U}_n)$. On va alors chercher des solutions du système perturbé proches des solutions du système $U' + A_0 U = 0$, qui sont les vecteurs :

$$u_j(\xi) = U_j e^{-\mu_j \xi}$$

où $U_j \in N(A_0 - \mu_j I)$.
Soit $j \in [1; n]$ et on pose : $v = u_j - u$ où u est solution du système perturbé, en supposant de plus $|v(\xi)| \leq C\varepsilon |u_j(\xi)| e^{\delta|\xi|} = C\varepsilon |U_j| e^{\delta|\xi|} e^{-\text{Re}\mu_j \xi}$.
L'équation $v' + A_0 v = \varepsilon B v + \varepsilon B u_j$ devient alors pour la k$^{\text{ème}}$ composante :

$$v_k' + \mu_k v_k = \varepsilon \langle U_k, B(u_j + v) \rangle$$

La solution v de ce système a alors pour composantes :

$$\begin{array}{ll} \text{si } j < k, & v_k = e^{-\mu_k \xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{(\mu_k - \mu_j)\eta} \langle U_k, \varepsilon B(u_j + v) e^{\mu_j \eta} \rangle \, d\eta \\ \text{si } j = k, & v_k = e^{-\mu_j \xi} \int_{0}^{\xi} e^{(\mu_k - \mu_j)\eta} \langle U_k, \varepsilon B(u_j + v) e^{\mu_j \eta} \rangle \, d\eta \\ \text{si } j > k, & v_k = e^{-\mu_k \xi} \int_{\xi}^{+\infty} e^{(\mu_k - \mu_j)\eta} \langle U_k, \varepsilon B(u_j + v) e^{\mu_j \eta} \rangle \, d\eta \end{array}$$

Le problème revient donc à chercher un point fixe à l'application :

$$F_j : v \to \left(e^{-\mu_1 \xi} \int_{\xi}^{+\infty} e^{(\mu_1 - \mu_j)\eta} \langle e_1, \varepsilon B(u_j + v) e^{\mu_j \eta} \rangle \, d\eta, \dots, e^{-\bar{\mu}_n \xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{(\bar{\mu}_n - \mu_j)\eta} \langle e_k, \varepsilon B(u_j + v) e^{\mu_j \eta} \rangle \, d\eta \right)$$

en se plaçant sur l'espace X^{2n} où $X = \{v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \exists\, C \in \mathbb{R} \text{ tel que } |v(\xi)| \leq C\varepsilon |u_j(\xi)| e^{\delta|\xi|}\}$, espace de Banach muni de la norme : $|||v||| = \sup_{\mathbb{R}} |e^{-\delta|\xi|} e^{\text{Re}\mu_j \xi} v|$
Alors, pour $j < k$, on a, sachant que B est bornée puisque $|\lambda| \leq C$:

$$\begin{array}{ll} \left| e^{-\mu_k \xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{(\mu_k - \mu_j)\eta} \langle U_k, \varepsilon B(v - w) e^{\mu_j \eta} \rangle \, d\eta \right| & \leq \varepsilon |||B|||_\infty |||v - w||| e^{-\text{Re}\mu_k \xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{(\text{Re}\mu_k - \text{Re}\mu_j)\eta} e^{\delta|\eta|} d\eta \\ & \leq \varepsilon |||B|||_\infty |||v - w||| \text{Cste}(\xi) \end{array}$$

De même on majore les autres intégrales. Donc, pour ε assez petit, F_j est contractante. On peut alors appliquer le théorème du point fixe de Banach : il existe un unique v tel que $v = F_j(v)$. Ainsi on a trouvé une solution au système perturbé, assez proche de la solution du système non-perturbé.

Maintenant, on suppose que $\mu = 0$. On cherche alors une solution proche des vecteurs $\Phi_1 = (\phi_1, \phi_1', \dots, \phi_1^{(2n-1)})$ et $\Phi_2 = (\phi_2, \phi_2', \dots, \phi_2^{(2n-1)})$, où ϕ_1 et ϕ_2 sont les solutions du système non-perturbé ; i.e. $c\Phi' - a_1 \Phi'' - (\lambda + f'(\phi_0)\Phi = 0$. Un calcul similaire montrerait que l'on peut trouver $\Phi_{1,\varepsilon}$, $\Phi_{2,\varepsilon}$ proches de Φ_1 et Φ_2.

Fonction d'Evans

Essentiellement, la fonction d'Evans D est le déterminant des vecteurs propres du système différentiel.

$$D_\varepsilon(\lambda) = \text{dét}[\phi_{1,\varepsilon}, \phi_{2,\varepsilon}, \dots, \phi_{2n,\varepsilon}]$$

D'après [1], la fonction d'Evans dépend de λ mais pas de ξ et est analytique.
De plus, $D_\varepsilon(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ est valeur propre de l'opérateur L_ε. Or on sait que les valeurs propres de L_0 sont toutes de parties réelles positives et isolées au voisinage de zéro. Il suffit donc de voir que, à une constante multiplicative près, $\varepsilon^{n(2n-1)} D_\varepsilon \to D_0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ pour conclure, à l'aide du théorème de Rouché, que les valeurs propres de L_ε sont de parties réelles positives et que 0 est une racine simple de $D_\varepsilon(\lambda)$, pour ε assez petit. En effet, selon le théorème de Rouché, si deux fonctions analytiques sont assez proches, alors elles possèdent le même nombre de zéros, comptés avec multiplicité. D'autre part, supposons que $N(L_\varepsilon)$ n'est pas de dimension 1. Soit $u \in N(L_\varepsilon) \backslash Vect(\phi'_\varepsilon)$. u possède alors une composante selon l'un des u_j, avec $j \neq p$, sinon en passant à la limite en ε, on aurait une contradiction avec la dimension de $N(L_0)$. Mais u ne peut donc pas être bornée en $-\infty$ et en $+\infty$. Par conséquent, $\dim(N(L_\varepsilon)) = 1$, et le théorème de multiplicité algébrique s'applique (cf. [1]). On a vu que les vecteurs propres sont proches des u_j et de ϕ_1, ϕ_2, base de solutions du système non-perturbé. Ainsi, en $O(\varepsilon^2)$, on a, dans le système de coordonnées initial, en revenant à la variable x :

$$D_\varepsilon(\lambda) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 1 & \dots & 1 \\ \phi'_1 & \phi'_2 & \frac{\mu_1}{\varepsilon} & & \frac{\bar{\mu}_n}{\varepsilon} \\ \varepsilon^2 \phi''_1 & \varepsilon^2 \phi''_2 & \frac{\mu_1^2}{\varepsilon^2} & & \frac{\mu_n}{\varepsilon^2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \varepsilon^{2n-1}\phi_1^{(2n-1)} & \varepsilon^{2n-1}\phi_2^{(2n-1)} & \frac{\mu_1^{2n-1}}{\varepsilon^{2n-1}} & & \frac{\mu_n^{2n-1}}{\varepsilon^{2n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{n(2n-1)}} \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \varepsilon\phi'_1 & \varepsilon\phi'_2 \end{vmatrix} |\mu_1|^2 \dots |\mu_n|^2 \mathrm{VdM}_{(2n-2)}[\mu_1, \dots, \bar{\mu}_n]$$

On a donc la convergence souhaitée. Les valeurs propres ont donc des parties réelles positives pour ε assez petit, ce qui permet, comme dans le cas non-perturbé de conclure à la stabilité.

Conclusion

Ainsi, on a démontré l'existence d'une onde progressive pour une équation aux dérivées partielles perturbée singulièrement. Ceci par des méthodes analytiques, notamment grâce au théorème de variété invariante de Fenichel puis par application du théorème des fonctions implicites.

La stabilité de l'onde progressive a ensuite été démontrée, dans le cas du système non-perturbé. Pour cela, on a utilisé le théorème de stabilité asymptotique, pour l'application duquel il faut étudier la répartition du spectre de l'équation linéarisée. Dans le cas perturbé le théorème de Rouché appliqué à la fonction d'Evans, dont les zéros sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire considéré, permet une nouvelle fois d'obtenir la stabilité en comparant au cas $\varepsilon = 0$.

On a donc retrouvé en totalité les résultats de [3] par des méthodes moins élaborées.

L'étude pourrait être poursuivie dans une des directions suivantes :
- question de la modélisation,
- existence de solutions au problème d'évolution,
- estimations uniformes en ε ,
- stabilité globale, …

Remerciements

A M. J.-M. Roquejoffre pour m'avoir guidée tout au long de mon stage, et à l'ensemble du laboratoire M.I.P. (Mathémathiques appliquées à l'Industrie et à la Physique), de l'université Paul Sabatier (Toulouse III), pour m'avoir accueillie chaleureusement.

Références

[1] J. Alexander & R. Gardner & C. K. R. T. Jones :*A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves*, Journal für die reine und angewandte Mathematik No 410 (1990).

[2] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson (1987).

[3] R. A. Gardner & C. K. R. T. Jones : *Travelling waves of a perturbed diffusion equation arising in a phase fields model*, Indiana University Mathematics Journal Vol. 38, No. 4 (1989).

[4] D. Henry : *The Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math. Vol. 840, Springer-Verlag (1976).

[5] C. K. R. T. Jones : *Geometric Singular Perturbation Theory*, CIME Lectures in dynamical systems, Lecture Notes in Math. Vol. 1609, Springer-Verlag (1994).

[6] J.-M. Roquejoffre : *Cours de D.E.A. : Ondes progressives monodimensionnelles ; Outils pour l'étude des EDP ellipltiques et paraboliques ; Ondes progressives multidimensionnelles.*