Exercices pour le contrôle de 14/12

Remarque : Le premier exercice du contrôle sera choisi parmi les questions des exercices 1 et 2. Le reste du contrôle sera chosi parmi les exercices 3-7.

Exercice 1.
Calculer le travail de champ $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, vue d'en haut. Utiliser la formule de Stokes.
Remarque : Le travail de champ $\overrightarrow{V} = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ est donné par l'intégrale curviligne $\oint_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$.

1. $\overrightarrow{V} = xz\overrightarrow{i} + 2xy\overrightarrow{j} + 3xy\overrightarrow{k}$,
   C la frontière de la partie du plan $3x + y + z = 6$ dans le premier octant.
2. $\overrightarrow{V} = 2z\overrightarrow{i} + 4x\overrightarrow{j} + 5y\overrightarrow{k}$,
   C la courbe d'intersection du plan $z = x + 8$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 16$.
3. $\overrightarrow{V} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (x^2 + y^2)\overrightarrow{k}$, C la frontière de la partie du paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$ dans le premier octant.

Exercice 2.
Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S en utilisant la formule d'Ostrogradsky.

1. $\overrightarrow{V} = 3x^2z^3\overrightarrow{i} + 9x^2yz^2\overrightarrow{j} - 4xy^2\overrightarrow{k}$,
   S le bord du cube de sommets $(\pm1, \pm1, \pm1)$.
2. $\overrightarrow{V} = x^2y\overrightarrow{i} + x^2z\overrightarrow{j} + x^2y\overrightarrow{k}$,
   S le bord du parallélipipède rectangle formé par les plans $x = 0, x = 3, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.
3. $\overrightarrow{V} = xz\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} - z^2\overrightarrow{k}$,
   S l'ellipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.
4. $\overrightarrow{V} = 2x^3\overrightarrow{i} + 2y^3\overrightarrow{j} + 2z^3\overrightarrow{k}$,
   S la sphère unité.
5. $\overrightarrow{V} = (x^3 + y\sin z)\overrightarrow{i} + (y^3 + z\sin x)\overrightarrow{j} + 3z\overrightarrow{k}$,
   S le bord du domaine limité par les demi-sphères supérieures de centre 0 et de rayon $1, 2$, et par le plan $z = 0$.

Exercice 3.
Soit f une fonction réelle intégrable et impaire. Donner la formule pour sa transformation de Fourrier à l'aide des fonctions sin ou cos.

Soit $\mathbb{1}_E$ la fonction indicatrice :

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

Exercice 4.
Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = te^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

Exercice 5.
On pose $g(x) = ae^{-ax}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ avec $a > 0$. Trouver le produit de convolution $g * g(x)$.

Exercice 6.
Soi $a > 0$. On donne la transformée de Fourier de la fonction e^{-ax^2} :

$$e^{-ax^2} \rightsquigarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2u^2/a}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\ e^{-x^2/2},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

1. Trouver sa transformée de Fourier.
2. En déduire que
$$\widehat{f * f}(u) = e^{-4\pi^2u^2},\ \forall u \in \mathbb{R}.$$
3. En déduire que
$$f * f(x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\ e^{-x^2/4},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.
On considère trois fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ g(x) = \frac{1}{2-2x+x^2},\ h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

et on donne la transformée de Fourier
$$\widehat{f}(u) = \pi e^{-2\pi|u|}.$$

1. Vérifier que $g(x) = f(x-a)$ avec a convenablement choisi et déduire *simplement* $\widehat{g}(u)$.
2. En utilisant maintenant une propriété de dérivation, en déduire *simplement* $\widehat{h}(u)$.