Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3e année
Année 2020–2021

Contrôle terminal – seconde chance –
– le mercredi 23 juin 2021 –
– durée 120 minutes –

Consignes

1. Le seul document accepté est le support complet de cours, sous forme papier. Il ne doit pas contenir d'ajouts concernant la correction des exercices.
2. Pas d'ordinateur, tablette, téléphone, calculatrice, montre connectée, ou autre objet connecté.
3. Pour chaque intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue ; justifier son existence et préciser à quel type d'intégrale s'appliquent les résultats utilisés.

Exercice # 1. (3 p.) Soit

$$I_n := \int_0^1 \left(1+\frac{x^n}{n}\right) e^{-x}\,dx, \forall\, n\in\mathbb{N},\, n\geq 1.$$

Calculer

$$\lim_{n\to\infty} I_n.$$

Exercice # 2. (3 p.) Soit $\Delta :=]0,\infty[^2$. Calculer

$$\int_\Delta \frac{\sin x}{e^{x+y}}\,dxdy.$$

Exercice # 3. (2 p.) Soit $D := \{x\in\mathbb{R}^2\,;\,|x|<1\}$, où $|x|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $x\in\mathbb{R}^2$. Calculer

$$\int_D \frac{1}{1+|x|}\,dx.$$

Exercice # 4. (4 p.) Soit

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\; f(x) := \exp\left(-|x_1|-\cdots-|x_n|\right),\;\forall\, x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Calculer $\widehat{f}$.

Exercice # 5. (4 p.) Soit

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},\;\forall\, x>1.$$

a) Montrer que $\zeta(x)$ existe, est finie et strictement positive, $\forall\, x>1$.

b) Montrer que la fonction ζ,

$$]1,\infty[\ni x\mapsto\zeta(x)\in]0,\infty[,$$

est continue.

c) Montrer que $\zeta \in C^1(]1,\infty[)$ et calculer $\zeta'(x), \forall\, x > 1$.

d) Proposer (sans justifier) une formule « raisonnable » pour $\zeta''(x)$.

e) En utilisant les formules des questions précédentes, montrer que

$$[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta(x)\, \zeta''(x),\ \forall\, x > 1.$$

f) Soit

$$f(x) := \frac{-\zeta'(x)}{\zeta(x)},\ \forall\, x > 1.$$

Montrer que f est strictement positive et décroissante.

g) (Question plus difficile) Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice $\#$ 6. (4 p.) Soit

$$F(a) := \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^a}\, dt,\ \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Trouver toutes les valeurs de a telles que $F(a)$ soit finie.
Rappel. Nous avons $1 - \cos t \leq t^2/2, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Exercice $\#$ 7. (3 p.) Soit

$$I_n := \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x/n)^n}\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

a) Montrer que I_n existe et est finie, $\forall\, n \geq 2$.

b) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} I_n.$$

Rappel. Pour tout $x \geq -1$, la suite $((1+x/n)^n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Exercice $\#$ 8. (3 p.) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^a}\, dx,\ \forall\, a < 1\ :$$

a) À partir de la dérivée de la fonction

$$]-\infty, 1[\ni a \mapsto I(a) := \int_0^1 \frac{1}{x^a}\, dx\,;$$

b) Par calcul direct.

Exercice $\#$ 9. (3 p.) Soient μ, ν deux mesures boréliennes σ-finies sur $\mathbb{R}^n$. Soit

$$\mu * \nu(E) := \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x+y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y),\ \forall\, E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

a) Montrer que $\mu * \nu = \nu * \mu$.

b) Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure borélienne.