
Feuille TD 1 : Espaces normés

Étant donné un espace vectoriel normé, on note $B(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r.

Exercice 1.1 **Vrai ou faux ?**

1. Soit une norme sur $\mathbf{R}^n$. Si $x \in \mathbf{R}^n$ et $r > 0$, alors $2B(x, r) = B(x, 2r)$.
2. L'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par $(x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme.
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur un espace vectoriel E. Si $x, y \in E$ vérifient $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda y$.
4. L'application $P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$ définit une norme sur $\mathbf{R}_1[X]$.
5. L'application $f \mapsto \int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$ définit une norme sur $C([0, 1])$.

Exercice 1.2 Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $\|\cdot\| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que $\|\cdot\|$ soit une norme sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 1.3 Dessiner la boule unité de la norme $\|\cdot\|_p$ dans $\mathbf{R}^2$ pour $p \in \{1, 2, \infty\}$.

Exercice 1.4 Soit $n \geqslant 1$. Pour x dans $\mathbf{R}^n$, établir les inégalités

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2.$$

Montrer que les constantes de ces inégalités ne peuvent pas être améliorées.

Exercice 1.5 Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose $\|(x, y)\| = \displaystyle\int_0^1 |x + ty|\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbf{R}^2$. Montrer ensuite que la boule unité de cette norme contient la boule unité de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 1.6 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, une permutation. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'application $x \mapsto \|(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\|$ est une norme. Est-ce encore vrai si on suppose que σ est une juste une application de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$?

Exercice 1.7 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que l'application $x \mapsto \|u(x)\|$ est une norme. En dimension finie, quelle est la propriété de norme qui n'est pas respectée lorsque l'on ne suppose pas u inversible ?

Exercice 1.8 Déterminer l'ensemble $I \subset \mathbf{R}$ des réels λ tel que la formule

$$N_\lambda(x, y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}$$

définit une norme sur $\mathbf{R}^2$? Pour λ et μ dans I, déterminer une constante $c(\lambda, \mu)$ telle que $N_\lambda \leqslant c(\lambda, \mu)N_\mu$.

<u>Exercice 1.9</u> Soit $n \geqslant 1$. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$, on pose

$$\|A\| = n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbf{R}^n$, et qu'elle vérifie

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

pour tous A, B dans $M_n(\mathbf{R})$.

Dans les exercices 1.9 à 1.11, on se donne une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E.

<u>Exercice 1.10</u> Pour $y \in E$, on note $\tau_y : E \to E$ l'application $x \mapsto x + y$. Montrer que l'image de la boule $B(x_0, r)$ par τ_y est une boule dont on précisera le centre et le rayon.

<u>Exercice 1.11</u> Pour x, y dans E, montrer l'inégalité

$$\|x\| + \|y\| \leqslant \|x + y\| + \|x - y\|$$

et en déduire

$$\|x\| + \|y\| \leqslant 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante 2 peut-elle être améliorée ?

<u>Exercice 1.12</u> Soient x_1, x_2 dans E et r_1, $r_2 > 0$.

1. Montrer l'équivalence

$$B(x_1, r_1) \subset B(x_2, r_2) \iff r_1 + \|x_1 - x_2\| \leqslant r_2$$

2. Montrer que $B(x_1, r_1) = B(x_2, r_2)$ et seulement si $x_1 = x_2$ et $r_1 = r_2$.

<u>Exercice 1.13</u> Soit $\|\cdot\|$ et N deux norme sur un espace vectoriel E. Soit $\alpha, \beta > 0$ deux réels. Montrer l'équivalence

$$\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leqslant \|x\| \leqslant \beta N(x) \iff \forall r > 0,\ B_N(0, r/\beta) \subset B_{\|\cdot\|}(0, r) \subset B_N(0, r\alpha)$$

<u>Exercice 1.14</u> Soient $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ deux normes sur $\mathbf{R}^n$ telles ques les boules unités fermées correspondantes coïncident. Peut-on en déduire que $\|\cdot\| = |||\cdot|||$?

<u>Exercice 1.15</u> Soit (x, y) deux vecteurs non nuls d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. Montrer l'inégalité

$$\left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \leqslant 2\|x - y\|.$$

(*Indication : Faire un dessin pour découper judicieusement la norme* $\left\| x - a + a - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\|$). En déduire

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 1.16 Soi (E,N) un espace vectoriel normé et V,W deux sous espaces supplémentaires de E. Pour x dans V, on définit $\|x\| = \inf\{N(x+y) \mid y \in W\}$.
1. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur V.
2. Calculer cette norme dans le cas $(E,N) = (\mathbf{R}^3, \|\cdot\|_2)$, $V = \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\{0\}$ et $W = \mathrm{Vect}((0,-1,1))$. On vérifiera d'abord que V et W sont supplémentaires.

Exercice 1.17 On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0)=0$. On désigne par $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme ($\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$).
1. Montrer que E est un espace vectoriel pour les lois usuelles.
2. Montrer que les fonctions données par

$$N_1(f) = \|f+f'\|_\infty \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

sont deux normes.
3. Nous allons montrer que ces deux normes sont équivalentes.
   3. 1. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, on a $f(t) = e^{-t}\displaystyle\int_0^t (f'(u)+f(u)e^u\mathrm{d}u$.
   3. 2. Retrouver ce résultat en résolvant l'équation différentielle $f'+f=g$ avec g continue.
   3. 3. En déduire qu'il existe $C>0$, tel que $N_2(f) \leqslant CN_1(f)$.
   3. 4. Conclure.