Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre printemps 2021–2022**

L3 Maths pour l'enseignement Approfondissement en analyse

Feuille TD 2 : Topologie

Exercice 2.1 On munit $\mathbf{R}$ de la norme $|\cdot|$. Lesquels des sous-ensembles suivants sont fermés, ouverts ou aucun des 2 ?

1. $[0,1[$;
2. $[0,+\infty[$;
3. $]-1,2[$;
4. $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} B(n,1/n)$;
5. $\mathbf{Q}$;
6. $\mathbf{Q}\cap[0,1]$;
7. $\mathbf{R}$.

Exercice 2.2 Soit $n\in\mathbf{N}^*$, montrer que la convergence dans $\mathbf{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ est équivalente à la convergence pour chaque composante pour la norme $|\cdot|$.

Exercice 2.3 On munit $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Lesquels des sous-ensembles suivants sont fermés ?

1. $\{(1/n,0),\ n=1,2,\ldots\}$;
2. $\{(x,y),\ y=x^2\}$;
3. $\{(m,n),\ m,n\in\mathbf{Z}\}$;
4. $\{(x,y),\ x^2+y^2\leqslant 1\}$;
5. $\{(x,y),\ x^2+y^2=1\}$;
6. $\{(x,y),\ 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ et } y=x^2\}$;
7. $\{(x,y),\ x\geqslant 1 \text{ et } 0\leqslant y\leqslant 1/x\}$;
8. $\{(x,y),\ x\notin\mathbf{Q} \text{ ou } y\notin\mathbf{Q}\}$.

Exercice 2.4 On considère $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ et $F=\{f\in E\mid f(0)=0\}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans E et $f\in E$, écrire la définition $f_n\to f$ pour la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. Montrer alors que F est fermé dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2.5 Soit E l'espace des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère F_k l'ensemble des suites k-périodiques, i.e. vérifiant $\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+k}=u_n$.

1. Montrer que F_k est fermé pour chaque k. Qu'en est-il de $F_2\cup F_3$?
2. (*) Montrer que $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} F_k$ n'est pas fermé.

Exercice 2.6 Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes alors les ouverts associés sont les mêmes et les notions de convergence, limite et continuité ne changent pas.

Exercice 2.7 Soit (E,N) un espace normé. On prend deux sous-parties A et B. On note

$$A+B=\{a+b\mid a\in A, b\in B\}.$$

1. Montrer que si A est ouvert, l'ensemble $A+B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compacte et B fermée, $A+B$ est fermé.
3. Montrer que si A et B sont compactes, $A+B$ l'est.

Exercice 2.8 Soit E un espace vectoriel normé et soit F un sous espace vectoriel. On suppose que F est ouvert. Montrer que $E=F$.

Exercice 2.9 On se place sur $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

1. Pour $P \in E_n$, on pose $N_1(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $N_2(P) = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe $C_n > 0$ telle que $N_1(P) \leq N_2(P)$ pour tout P dans E_n.

2. Montrer qu'il existe $C'_n > 0$ tel que pour tout $P \in E_n$ unitaire (i.e. dont le coefficient dominant est 1),

$$N_1(P) \geqslant C'_n.$$

On pourra considérer $N_3(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n) = \max(|a_0|, \ldots, |a_n|)$.

Exercice 2.10 Soit (E, N) un espace normé. Pour $x \in E$ et A une sous partie non vide de E, on note

$$d(x, A) = \inf\{N(x - y) \mid y \in A\}.$$

1. On suppose A fermé. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
2. (*) Montrer que pour $(x, y) \in E$, on a l'inégalité $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant N(x - y)$.
3. Pour deux sous parties A et B non vides de E, démontrer, en utilisant la question précédente, que les deux parties $C = \{x \in E \mid d(x, A) = d(x, B)\}$ et $D = \{x \in E \mid d(x, A) \leqslant d(x, B)\}$ sont fermées.
4. On se place dans $E = \mathbf{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Nous allons calculer $d(x, A)$ dans le cas où $A = \overline{B}(0, 1)$.

    4. 1. Quels sont les $x \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $d(x, A) = 0$?

    4. 2. Montrer que pour les autres $x \in \mathbf{R}^n$, $d(x, A) = \|x\|_2 - 1$ et que la borne inférieure est atteinte.

Exercice 2.11 Soit (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces normés. Rappeler la définition de $f\colon E \to F$ continue. Montrer alors que l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est ouvert. Montrer la réciproque.

Exercice 2.12 Soit E un espace topologique normé et soit h une fonction continue de E dans E admettant une limite nulle en 0. On suppose en plus que pour tout $x \in E$,

$$h(x) = h(x/2).$$

Montrer que h est la fonction nulle.

Exercice 2.13 On se place sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. On définit $N(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 + |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t}$.

1. Montrer que N est une norme.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant CN(f)$ pour tout $f \in E$. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?
3. Montrer que $F_0 = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un sous espace vectoriel fermé de E et que $N'(f) = \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t}$ est une norme sur F_0 équivalente à N.

Exercice 2.14 Soit K un compact non vide de $(E = R^n, N)$. On appelle diamètre de K la quantité

$$\delta(K) = \sup\{N(x - y) \mid (x, y) \in E^2\}.$$

1. Montrer que ce sup est bien fini et qu'il existe x_0 et y_0 dans K tels que $\delta(K) = N(x_0 - y_0)$.
2. Expliquer pourquoi les ensembles suivants sont compacts et donner le diamètre.
   2. 1. $\overline{B}(a, r) \subseteq \mathbf{R}^n$;
   2. 2. $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbf{R}^2$ pour les normes $\| \cdot \|_i$ pour $i \in \{1, 2, \infty\}$;
   2. 3. $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\} = \{(a \cos t, b \sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ pour la norme $\| \cdot \|_2$.

Exercice 2.15 Soit (E, N) un espace normé et soit K une partie compacte de E. On considère une application $f : K \to K$ continue vérifiant

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y,\ N(f(x) - f(y)) < N(x - y).$$

1. Nous allons montrer que f a un unique point fixe noté α, ie $f(\alpha) = \alpha$.
   1. 1. Montrer d'abord que f a au plus un seul point fixe.
   1. 2. En considérant $x \mapsto N(f(x) - x)$, montrer l'existence du point fixe.
2. Soit $x_0 \in B$, on définit la suite $(x_n)_n$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.
   2. 1. Démontrer que la suite de terme général $N(x_n - \alpha)$ converge vers un réel δ.
   2. 2. Montrer que si β est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$, alors $N(\beta - \alpha) = \delta$.
   2. 3. Montrer que si β est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ alors $f(\beta)$ l'est aussi.
   2. 4. Conclure que $x_n \to \alpha$.