Contrôle écrit
le 28 octobre 2022 – durée 120 minutes

Question de cours. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel. Montrer que $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.

Exercice # 1. Soit $a : \mathbb{R} \to]0, \infty[$. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose

$$\|f\| := \sup\{a(x)\,|f(x)|\,;\, x \in \mathbb{R}\} \in [0, \infty].$$

Soit

$$E := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, \|f\| < \infty\}.$$

Montrer que $(E, \| \|)$ est un espace de Banach.

Exercice # 2. Soit $E := C([-1, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme usuelle $\| \|_\infty$.

1. Soit

$$\varphi : E \to \mathbb{R},\ \varphi(f) := \int_{-1}^{1} t\, f(t)\, dt,\ \forall\, f \in E.$$

On admet, et on ne demande pas de le montrer, que φ est bien définie et est une forme linéaire sur E.

2. Montrer que φ est continue et calculer la norme $\|\varphi\|$ de φ.
3. Montrer que, dans la formule

$$\|\varphi\| = \sup\{\varphi(f)\,;\, f \in E,\ \|f\|_\infty \le 1\},$$

le sup n'est pas atteint.

Exercice # 3.

1. Rappeler :
   (a) La définition de c_0.
   (b) Quelle est la norme usuelle sur c_0.
   (c) Quel est le sens de la dualité $(c_0)' = \ell^1$. (On ne demande pas de montrer cette propriété.)
2. Montrer que c_0 est séparable.
3. Soient $(x^j)_{j\ge 0}$ une suite bornée de c_0 et $x \in c_0$. Si $x^j = (a_n^j)_{n\ge 0}, \forall\, j \ge 0$, et $x = (a_n)_{n\ge 0}$, montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :
   (i) $x^j \rightharpoonup x$ quand $j \to \infty$.

(ii) $a_n^j \to a_n$ quand $j \to \infty, \forall\, n \geq 0$.

Exercice # 4. Soient E et F deux sous-espaces fermés orthogonaux d'un espace de Hilbert H. Montrer que $E + F$ est fermé.

Exercice # 5. Soit H un espace de Hilbert réel. Soient $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée et $(f_n)_{n\geq 0} \subset H$ une suite orthonormée.

1. Montrer que la relation

$$Tx := \sum_{n\geq 0} a_n \langle x, f_n\rangle f_n,\ \forall\, x \in H,$$

définit un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$.

2. Calculer T^*.