Contrôle écrit – corrigé
le 28 octobre 2022

Question de cours. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel. Montrer que $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.

Réponse. « $\supset$ » Soit $G := \overline{F}$. En utilisant l'implication évidente $[A \subset B \subset H] \implies B^\perp \subset A^\perp$, nous avons $G^\perp \subset F^\perp$.

« $\subset$ » Soit $y \in F^\perp$. Soit $x \in G$. Soit $(x_j) \subset F$ telle que $x_j \to x$. Par continuité (séparée) du produit scalaire, $\langle y, x\rangle = \lim_j \langle y, x_j\rangle = 0$. $x \in G$ étant arbitraire, on obtient $y \in G^\perp$. □

Exercice # 1. Soit $a : \mathbb{R} \to]0, \infty[$. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose

$$\|f\| := \sup\{a(x)\,|f(x)|\,;\, x \in \mathbb{R}\} \in [0, \infty].$$

Soit $E := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, \|f\| < \infty\}$.

Montrer que $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach.

Réponse. Préliminaires. Par propriétés usuelles du $\sup$, nous avons $\|f\| \geq 0$, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ et $\|tf\| = |t|\|f\|$, $\forall\, f, g : R \to \mathbb{R}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

E est un espace vectoriel, car $[\|f\| < \infty, \|g\| < \infty, t \in \mathbb{R}] \implies [\|f + g\| < \infty, \|tf\| < \infty]$.

$\|\ \|$ est une norme. Au vu de ce qui précède, il suffit de vérifier la séparation. Si $\|f\| = 0$, alors $a(x)\,|f(x)| \leq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, d'où $|f(x)| \leq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (car $a(x) > 0$), et donc $f = 0$.

E est complet. Soit $(f_j)_{j\geq 0} \subset E$ une suite de Cauchy. $(f_j)_{j\geq 0}$ est donc bornée et nous avons

$$\lim_{j,k\to\infty} \|f_j - f_k\| = \lim_{j\to\infty} \sup_{k\geq j} \|f_j - f_k\| = 0. \tag{1}$$

Étape 1. $(f_j)_{j\geq 0}$ converge simplement. Si $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$a(x)\,|f_j(x) - f_k(x)| \leq \|f_j - f_k\|,\ \forall\, j, k \geq 0, \tag{2}$$

d'où en particulier

$$\lim_{j,k\to\infty} |f_j(x) - f_k(x)| \leq \lim_{j,k\to\infty} \|f_j - f_k\|/a(x) = 0,$$

d'où $(f_j(x))_{j\geq 0} \subset \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim_j f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Étape 2. Conclusion. En prenant, dans (2), j fixé arbitraire et $k \geq j$, $k \to \infty$, nous obtenons

$$a(x)\,|f_j(x) - f(x)| \leq \sup_{k\geq j} \|f_j - f_k\|,\ \forall\, j,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

d'où, d'une part (en utilisant le fait que $(f_j)_{j\geq 0}$ est bornée)

$$\|f_j - f\| \leq \sup_{k\geq j} \|f_j - f_k\| < \infty,\ \forall\, j \geq 0. \tag{3}$$

D'autre part, (3) donne, pour $j=0$, $f_0-f\in E$, et donc $f\in E$ (car $f_0\in E$). Enfin, en faisant $j\to\infty$ dans (3) nous obtenons, grâce à (1), que $f_j\to f$ dans E. $\square$

Exercice # 2. Soit $E:=C([-1,1],\mathbb{R})$, muni de la norme usuelle $\| \, \|_\infty$.

1. Soit $\varphi : E\to\mathbb{R}$, $\varphi(f):=\displaystyle\int_{-1}^{1} t\, f(t)\, dt$, $\forall\, f\in E$.

   On admet, et on ne demande pas de le montrer, que φ est bien définie et est une forme linéaire sur E.

2. Montrer que φ est continue et calculer la norme $\|\varphi\|$ de φ.

3. Montrer que, dans la formule
   $$\|\varphi\|=\sup\{\varphi(f)\,;\, f\in E,\, \|f\|_\infty\le 1\},$$
   le $\sup$ n'est pas atteint.

Réponse. 2. *φ est continue.* Nous avons
$$|\varphi(f)|\le\int_{-1}^{1}|t|\,|f(t)|\,dt\le\|f\|_\infty\int_{-1}^{1}|t|\,dt=\|f\|_\infty,$$
d'où φ est continue et $\|\varphi\|\le 1$.

Calcul de $\|\varphi\|$. Soit, pour $j\ge 1$, $f_j:[-1,1]\to[-1,1]$, $f_j(t):=\begin{cases}1, & \text{si } t\ge 1/j\\ jt, & \text{si } |t|\le 1/j\\ -1, & \text{si } t\le -1/j\end{cases}$.

Clairement, f_j est continue et $\|f_j\|_\infty=1$, $\forall\, j\ge 1$. Nous avons
$$1-\frac{1}{3j^2}=\varphi(f_j)\le\|\varphi\|\|f_j\|_\infty=\|\varphi\|\le 1. \tag{4}$$
(4) et le théorème des gendarmes donnent $\|\varphi\|=1$.

3. *Preuve par l'absurde.* Soit $f\in E$ telle que $\|f\|_\infty\le 1$ et $\varphi(f)=1$. Il s'ensuit que
$$1=\varphi(f)=\int_{-1}^{1}t\,f(t)\,dt\le\int_{-1}^{1}|t|\,\underbrace{|f(t)|}_{\le\|f\|_\infty}\,dt\le\|f\|_\infty\int_{-1}^{1}|t|\,dt=\|f\|_\infty\le 1. \tag{5}$$
Les trois inégalités de (5) sont donc saturées, d'où : (i) $t\mapsto t\,f(t)$ est ≥ 0 sur $[-1,1]$; (ii) $|t|\,|f(t)|=|t|\|f\|_\infty$ pour tout $t\in[-1,1]$; (iii) $\|f\|_\infty=1$. De (ii) et (iii), $|f(t)|=1$ pour tout $t\neq 0$. Par continuité de $|f|$, nous avons également $|f(0)|=1$. Donc soit $f\equiv 1$, soit $f\equiv -1$. Dans les deux cas, (i) n'est pas satisfaite, contradiction qui achève la preuve. $\square$

Exercice # 3.

1. Rappeler :
   (a) La définition de c_0.
   (b) Quelle est la norme usuelle sur c_0.
   (c) Quel est le sens de la dualité $(c_0)'=\ell^1$. (On ne demande pas de montrer cette propriété.)

2. Montrer que c_0 est séparable.

3. Soient $(x^j)_{j\geq 0}$ une suite bornée de c_0 et $x \in c_0$. Si $x^j = (a^j_n)_{n\geq 0}, \forall\, j \geq 0$, et $x = (a_n)_{n\geq 0}$, montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

   (i) $x^j \rightharpoonup x$ quand $j \to \infty$.

   (ii) $a^j_n \to a_n$ quand $j \to \infty, \forall\, n \geq 0$.

Réponse. 2. Comme vu en TD, il suffit de trouver une suite de sous-espaces E_m de c_0, de dimension finie et tels que : (P) pour tout $x \in c_0$ et $\varepsilon > 0$, il existe m et $y \in E_m$ tels que $\|x-y\|_\infty \leq \varepsilon$.
Choix de E_m. Soit $E_m := \{(a_n)_{n\geq 0}\,;\ a_n = 0,\ \forall\, n > m\}$, s. e. v. de dimension $m+1$ de c_0.
(P) *est satisfaite.* Soient $x = (a_n)_{n\geq 0} \in c_0$ et $\varepsilon > 0$. Soit m tel que $|a_n| \leq \varepsilon, \forall\, n > m$. Soit $b_n := \begin{cases} a_n, & \text{si } n \leq m \\ 0, & \text{si } n > m \end{cases}$. Alors $y := (b_n)_{n\geq 0} \in E_m$ et $\|x-y\|_\infty = \sup_{n>m} |a_n| \leq \varepsilon$.
3. « $\Rightarrow$ » Soit $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{K}$, $\varphi_n(a_m)_{m\geq 0} := a_n$. Clairement, φ_n est linéaire et $\|\varphi_n\| \leq 1$, d'où $\varphi_n \in (c_0)'$. Si $x^j \rightharpoonup x$, alors $\varphi_n(x^j) \to \varphi(x)$, et donc $a^j_n \to a_n$ quand $j \to \infty$.
« $\Leftarrow$ » Grâce à l'identification $(c_0)' = \ell^1$, nous avons à montrer que, pour tout $y = (b_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$,

$$\lim_{j\to\infty} \left(\sum_{n\geq 0} b_n\, a^j_n - \sum_{n\geq 0} b_n\, a_n \right) = 0. \tag{6}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soient $0 < M < \infty$ et $m \geq 0$ tels que $\|x^j\|_\infty \leq M, \forall\, j$, $\|x\|_\infty \leq M$, et

$$\sum_{n>m} |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{7}$$

Soit j_0 (dont l'existence découle de l'hypothèse $a^j_n \to a_n, \forall\, n$) tel que

$$\left| \sum_{0\leq n\leq m} b_n\, a^j_n - \sum_{0\leq n\leq m} b_n\, a_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, j \geq j_0. \tag{8}$$

Si $j \geq j_0$, nous avons, de (7) et (8),

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n\geq 0} b_n\, a^j_n - \sum_{n\geq 0} b_n\, a_n \right| &\leq \left| \sum_{0\leq n\leq m} b_n\, a^j_n - \sum_{0\leq n\leq m} b_n\, a_n \right| + \sum_{n>m} |b_n(a^j_n - a_n)| \\
&\leq \left| \sum_{0\leq n\leq m} b_n\, a^j_n - \sum_{0\leq n\leq m} b_n\, a_n \right| + \sum_{n>m} |b_n| \underbrace{(|a^j_n| + |a_n|)}_{\leq 2M} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{n>m} |b_n| \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où (6) et la conclusion de l'exercice. □

Exercice # 4. Soient E et F deux sous-espaces fermés orthogonaux d'un espace de Hilbert H. Montrer que $E + F$ est fermé.

Réponse. E et F sont complets (fermés dans un espace complet). Soit $(x_j) \subset E + F$ telle que $x_j \to x \in H$. Nous avons $x_j = e_j + f_j$, avec $e_j \in E$, $f_j \in F$. Nous avons

$$\|e_j - e_k\|^2 + \|f_j - f_k\|^2 = \|(e_j + f_j) - (e_k + f_k)\|^2 = \|x_j - x_k\|^2, \forall\, j, k,$$

(car $(e_j - e_k) \perp (f_j - f_k)$, $\forall\, j, k$), d'où

$$\lim_{j,k\to\infty} \|e_j - e_k\| \le \lim_{j,k\to\infty} \|x_j - x_k\| = 0.$$

$(e_j)_{j\ge 0}$ est donc une suite de Cauchy de E, d'où elle converge vers un $e \in E$. De même, $(f_j)_{j\ge 0}$ converge vers un $f \in F$. Par continuité de la somme dans un espace normé, nous obtenons $x_j = e_j + f_j \to e + f$, d'où, par unicité de la limite, $x = e + f \in E + F$. □

Exercice # 5. Soit H un espace de Hilbert réel. Soient $(a_n)_{n\ge 0} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée et $(f_n)_{n\ge 0} \subset H$ une suite orthonormée.

1. Montrer que la relation
$$Tx := \sum_{n\ge 0} a_n \langle x, f_n\rangle f_n,\ \forall\, x \in H,$$
définit un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$.

2. Calculer T^*.

Réponse. 1. À supposer la série donnant Tx convergente, $\forall\, x \in H$, T est linéaire, comme limite simple d'applications linéaires. Soit $M < \infty$ tel que $|a_n| \le M$, $\forall\, n$. Nous avons (grâce à l'inégalité de Bessel)

$$\sum_{n\ge 0} \|a_n\langle x, f_n\rangle f_n\|^2 = \sum_{n\ge 0} \underbrace{(a_n)^2}_{\le M^2} \langle x, f_n\rangle^2 \le M^2 \sum_{n\ge 0} \langle x, f_n\rangle^2 \le M^2\|x\|^2. \tag{9}$$

La suite $(a_n\langle x, f_n\rangle f_n)_{n\ge 0}$ étant orthogonale, (9) entraîne la convergence de la série donnant Tx, ainsi que

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n\ge 0} \|a_n\langle x, f_n\rangle f_n\|^2 \le M^2\|x\|^2,\ \forall\, x \in H.$$

De ce qui précède, $T \in \mathscr{L}(H)$ (et $\|T\| \le M$).

2. Si $x, y \in H$ alors, par continuité (séparée) du produit scalaire, convergence de la série donnant Tx, et linéarité du produit scalaire,

$$\langle y, Tx\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle y, \sum_{0\le n\le m} a_n\langle x, f_n\rangle f_n \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{0\le n\le m} a_n\langle x, f_n\rangle\langle y, f_n\rangle.$$

Par symétrie de la formule obtenue, nous avons $\langle y, Tx\rangle = \langle Ty, x\rangle$, $\forall\, x, y \in H$, d'où $T^*y = Ty$, $\forall\, y \in H$, et donc $T^* = T$. □