Feuille de TD # 1
Normes, applications linéaires continues, complétude

NB. Sauf mention explicite contraire, tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

Exercice # 1. Trouver toutes les normes sur $\mathbb{R}$.

Exercice # 2. Vérifier que l'application

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \|(x,y)\| := \max(|x+3y|, |x-y|)$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner sa boule unité.

Exercice # 3. Montrer que l'application

$$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto |x| + \left(y^2+z^2\right)^{1/2}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^3$.

Proposer et montrer une généralisation de cette question.

Exercice # 4. Pour tout vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$, soient

$$\|X\|_1 := \sum_{i=1}^n |X_i| \text{ et } \|X\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |X_i|.$$

Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ de $M_n(\mathbb{R})$, soient

$$\|A\|_\infty := \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \text{ et } \quad |||A|||_\infty := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

1. Montrer que
$$\begin{aligned}&\|A\|_\infty = \sup\{\|AX\|_\infty\,;\, X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|_1\le 1\},\\ &|||A|||_\infty = \sup\{\|AX\|_\infty\,;\, X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|_\infty\le 1\}.\end{aligned}$$
2. Montrer que $\|\ \|_\infty$ et $|||\ |||_\infty$ sont des normes sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$\|AB\|_\infty \le n\|A\|_\infty\,\|B\|_\infty \text{ et } |||AB|||_\infty \le |||A|||_\infty\,|||B|||_\infty.$$

Exercice # 5. Sur ℓ^1 $(= \ell^1(\mathbb{N}))$, soit

$$\|x\| := \sum_{n\ge 0} \frac{1}{n+1}|a_n|,\ \forall\, x = (a_n)_{n\ge 0} \in \ell^1.$$

Montrer que $\|\ \|$ est une norme qui n'est pas équivalente avec la norme usuelle $\|\ \|_1$.

Exercice # 6. Dans les questions suivantes, $T : E \to F$ est une application linéaire entre les espaces vectoriels normés (E, N_1) et (F, N_2). Déterminer si T est continue et, si tel est le cas, déterminer sa norme $\|T\|$.

1. E est un espace pré-hilbertien muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme induite $\|\ \|$, $F := \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle, $a \in E$ est fixé, $T(x) := \langle x, a\rangle, \forall\, x \in E$.
2. $E = F := C([0,1], \mathbb{R})$, $N_1(f) = N_2(f) := \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$, $T(f) := fg$, où $g \in E$ est fixée.
3. E, F, T comme dans la question précédente, $N_1(f) := \|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\, dx\right)^{1/2}$, $N_2(f) := \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$.
4. $E = F := \mathbb{R}[X]$, $N_1\left(\displaystyle\sum_k a_k X^k\right) = N_2\left(\displaystyle\sum_k a_k X^k\right) := \displaystyle\sum_k |a_k|$, $T(P) := P'$.
5. $E = F := \mathbb{R}_n[X]$, $N_1\left(\displaystyle\sum_{0\le k\le n} a_k X^k\right) = N_2\left(\displaystyle\sum_{0\le k\le n} a_k X^k\right) := \displaystyle\sum_{0\le k\le n} |a_k|$, $T(P) := P'$.
6. $E = F := \mathbb{R}[X]$, $N_1\left(\displaystyle\sum_k a_k X^k\right) = N_2\left(\displaystyle\sum_k a_k X^k\right) := \displaystyle\sum_k k!\, |a_k|$, $T(P) := P'$.

Exercice # 7. Soit $\alpha : [0,1] \to [0,1]$. Soit $E := C([0,1], \mathbb{R})$. On définit

$$\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} \alpha(x)\, |f(x)|,\ \forall\, f \in E,\ \text{ et l'ensemble } B := \{x \in [0,1]\,;\, \alpha(x) > 0\}.$$

Montrer l'équivalence suivante : $\|\ \|$ est une norme si et seulement $\overline{B} = [0,1]$.

Indication : pour l'implication « $\Longrightarrow$ », il peut être utile de montrer au préalable que, si $\overline{B} \neq [0,1]$, alors $[0,1] \setminus B$ contient un intervalle ouvert non-vide.

Exercice # 8. Énoncer et prouver l'analogue de l'exercice précédent pour l'application

$$C([0,1], \mathbb{R}) \ni f \mapsto \int_0^1 \alpha(x)\, |f(x)|\, dx,$$

où $\alpha : [0,1] \to [0,\infty[$ est continue.

Exercice # 9. Rappelons que, si E est un espace vectoriel, alors une partie convexe de E est un ensemble $C \subset E$ tel que

$$[x \in C,\ y \in C,\ t \in [0,1]] \implies (1-t)x + ty \in C.$$

Soit E un espace vectoriel, et soit $p : E \to [0,\infty[$ une fonction telle que

1. $p(x) = 0 \iff x = 0$.
2. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x),\ \forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que p est une norme sur E si et seulement si l'ensemble $C := \{x \in E\,;\, p(x) \le 1\}$ est convexe.

Exercice # 10. Soit $E := C^\infty([0,1], \mathbb{R})$, muni d'une norme, et

$$T : E \to E,\ T(f) := f',\ \forall\, f \in E.$$

Montrez que T n'est pas continu.

Exercice # 11. Soient E un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie et $T : E \to E$ un endomorphisme diagonalisable.

1. Montrer que, pour toute norme $\| \;\|$ sur E, on a
$$\|T\| \geq \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma(T)\}. \tag{1}$$
2. Montrer que l'on peut choisir $\| \;\|$ de sorte à avoir l'égalité dans (1).

Exercice # 12. Soit $(E, \| \;\|)$ un espace vectoriel normé *complexe* de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer la *formule du rayon spectral*

$$\rho(T) := \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{1/k},\ \forall\, T \in \mathscr{L}(E), \tag{2}$$

où $\mathscr{L}(E)$ est muni de la norme subordonnée à $\| \;\|$, encore notée $\| \;\|$.

Le cas particulier où $E = \mathbb{C}^n$ est déjà intéressant, et par ailleurs aussi difficile que le cas général.

Notons qu'il n'est pas clair, à ce stade, que la limite considérée dans (2) existe.

1. Montrer que $\rho(T) \leq \left\|T^k\right\|^{1/k}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire qu'il suffit de montrer que
$$\rho(T) \geq \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{1/k}. \tag{3}$$
3. Soit $P \in \mathscr{L}(E)$ inversible. Montrer que, si (3) est vraie pour $P^{-1} \circ T \circ P$, alors (3) est vraie pour T.
4. En déduire qu'il suffit de montrer (3) si T est de la forme $T = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotent et $D \circ N = N \circ D$.
5. Montrer que, si (3) est vraie pour *une* norme, alors (3) est vraie pour *toute* norme.
6. En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver une norme $\| \;\|$ qui vérifie (3) pour $T = D + N$ comme ci-dessus.
7. Conclure.

Exercice # 13. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \;\|_p$, et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $|\!|\!| \;|\!|\!|_p$ subordonnée à $\| \;\|_p$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que

1. $|\!|\!|A|\!|\!|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{1\leq i\leq n} |a_{ij}|$.
2. $|\!|\!|A|\!|\!|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{1\leq j\leq n} |a_{ij}|$.
3. $|\!|\!|A|\!|\!|_2 = \max\{\lambda^{1/2} \,;\, \lambda \in \sigma(A^*A)\}$.
4. Si $1 < p < \infty$, alors $|\!|\!|A|\!|\!|_p \leq |\!|\!|A|\!|\!|_1^{1/p} |\!|\!|A|\!|\!|_\infty^{1-1/p}$ (*inégalité de Schur*). On pourra s'inspirer de la preuve de l'inégalité de Young sur les produits de convolution.

Exercice # 14. S'inspirer de la question 4 de l'exercice précédent pour montrer le résultat suivant. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy,\ \forall\, x \in [0,1].$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on munit $E := C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\| \|_p$, où, si $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

1. Rappeler pourquoi Tf est une fonction continue, et donc $T : E \to E$. Clairement, T est linéraire.
2. On pose

   $$M_1 := \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\, dx,\ M_\infty := \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\, dy.$$

   Montrer que $\|T\| \leq M_1^{1/p}\, M_\infty^{1-1/p}$.

Exercice # 15. Avec les notations de l'exercice précédent, montrer que, si $p = 2$,

$$\|T\| \leq \|K\|_2 = \left(\int_{[0,1]^2} (K(x,y))^2\, dxdy \right)^{1/2}.$$

Exercice # 16. Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Le but de cet exercice est de montrer qu'une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si Ker φ est fermé.

1. Montrer le sens direct.
2. Inversement, on suppose que Ker φ est fermé.
   (a) Montrer que $\varphi^{-1}(\{1\})$ est fermé.
   (b) Montrer qu'il existe une boule $B(0,r)$ qui n'intersecte pas $\varphi^{-1}(\{1\})$.
   (c) Montrez que, pour tout $x \in B(0,r)$, on a $|\varphi(x)| \leq 1$.
   (d) Conclure.

Exercice # 17. Soit $E := C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme usuelle $\| \|_\infty$. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire *positive*, c'est-à-dire

$$[f \in E, f \geq 0] \implies \varphi(f) \geq 0.$$

Montrer que φ est continue.
Généralisation ?

Exercice # 18. Soit $\alpha : \mathbb{R} \to]0,\infty[$. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} \alpha(x)\, |f(x)| \in [0,\infty].$$

Soit

$$E := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \|f\| < \infty\}.$$

Montrer que $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach.

Exercice # 19.

1. Soit (X, d) un espace métrique non-vide. On fixe un point $x_0 \in X$.
   Soit
   $$\|f\| := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}\,;\ x, y \in X,\ x \neq y \right\} \in [0, \infty],\ \forall\, f : X \to \mathbb{R}.$$
   Soit
   $$\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R}\,;\ f(x_0) = 0 \text{ et } \|f\| < \infty\}.$$
   Montrer que $(\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R}), \| \ \|)$ est un espace de Banach.
2. Plus généralement, soit (Y, N) un espace vectoriel normé.
   Soit
   $$\|f\| := \sup \left\{ \frac{N(f(x) - f(y))}{d(x,y)}\,;\ x, y \in X,\ x \neq y \right\} \in [0, \infty],\ \forall\, f : X \to Y.$$
   Soit
   $$\mathrm{Lip}_0(X, Y) := \{f : X \to Y\,;\ f(x_0) = 0 \text{ et } \|f\| < \infty\}.$$
   Si Y est un espace de Banach, montrer que $(\mathrm{Lip}_0(X, Y), \| \ \|)$ est un espace de Banach.
3. Si X et Y sont des espaces vectoriels normés munis des distances induites par les normes respectives et $x_0 = 0$, montrer que $\mathscr{L}(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$.

Exercice # 20. Avec les notations de l'exercice précédent, soient

$$\mathrm{Lip}(X, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R}\,;\ \|f\| < \infty\},\ |||f||| := |f(x_0)| + \|f\|.$$

Montrer que $(\mathrm{Lip}(X, \mathbb{R}), ||| \ |||)$ est un espace de Banach.

Exercice # 21. Soit E un espace vectoriel normé. Quels sont les sous-espaces vectoriels F de E qui contiennent une boule ?

Exercice # 22. **(Un espace de Banach ne peut avoir une base dénombrable)** Pour cet exercice, nous utilisons le résultat suivant, qui sera démontré ailleurs.

Lemme de Riesz. Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit Y un sous-espace strict de X, de dimension finie. Alors il existe $x \in X$ tel que :

(i) $\|x\| = 1$.

(ii) $\|x - y\| \geq 1, \forall\, y \in Y$.

Le but de cet exercice est de montrer que, si $(E, \| \|)$ est un espace de Banach, alors E ne peut avoir une base *algébrique* dénombrable. (Rappel : un ensemble est *dénombrable* s'il est en correspondance bijective avec $\mathbb{N}^*$.) Preuve par l'absurde : supposons que E a une base algébrique $\{e_n\}_{n\geq 1}$, c'est-à-dire que tout élément x de E s'écrit exactement d'une façon sous la forme $x = \sum_{n\geq 1} x_k e_k$, avec un nombre fini de scalaires x_k non-nuls.

En utilisant cette hypothèse, nous allons construire une suite de Cauchy de E qui ne converge pas ; la contradiction obtenue va achever la preuve.

1. Posons $E_n := \text{Vect}\,\{e_1, \ldots, e_n\}, \forall\, n \geq 1$. Montrer que
   (a) $E_{n+1} \neq E_n, \forall\, n \geq 1$.
   (b) $E = \cup_{n\geq 1} E_n$.
2. En utilisant le lemme de Riesz, construire une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ telle que
   (a) $f_n \in E_n, \forall\, n \geq 1$.
   (b) $\|f_n\| = 1, \forall\, n \geq 1$.
   (c) $\|f_{n+1} - y\| \geq 1, \forall\, n \geq 1, \forall\, y \in E_n$.
   (d) $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de $E_n, \forall\, n \geq 1$.
   (e) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est une base de E.
3. On pose $x_n := \sum_{1\leq k\leq n} 3^{-k} f_k, \forall\, n \geq 1$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy.
4. Soient $m \geq 1$ et $y \in E_m$. Montrer que $\|x_n - y\| \geq \dfrac{1}{2 \cdot 3^{m+1}}, \forall\, n \geq m + 1$.
5. Conclure.

Cas particulier : montrer qu'il n'existe aucune norme sur $\mathbb{R}[X]$ le rendant complet.

Exercice # 23. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est ni un sous-espace ouvert, ni un sous-espace fermé de $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de sa norme usuelle $\| \|_\infty$.

Commencer par préciser pourquoi $\mathbb{R}[X]$ peut être vu comme un sous-espace de $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice # 24. Obtenir directement la conclusion de l'exercice précédent en considérant la suite $(P_n)_{n\geq 0}$, où

$$P_n(X) := \sum_{0\leq k\leq n} \frac{1}{k!} X^k.$$

Exercice # 25. Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On définit $Tf(0) := \pi f(0)/2$ et, pour $0 < x \leq 1$,

$$Tf(x) := \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}}\, dy.$$

Démontrer que T est un opérateur continu de $(C([0, 1], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ dans lui-même, et que $\|T\| = \pi/2$. Indication : on pourra faire le changement de variables $y = xt$.

Exercice # 26. Soient $1 \leq p < \infty$ et $y = (b_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$.

Montrer que l'ensemble

$$K := \{(a_n)_{n\geq 0}\,;\, |a_n| \leq |b_n|,\ \forall\, n \geq 0\}$$

est compact.

Résultat similaire dans c_0.