Feuille de TD # 2

Distance à un ensemble, espace dual, séparabilité

NB. Sauf mention explicite contraire, tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

NB. Si $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ est le *conjugué de p*, défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nous avons donc

$$q = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{si } 1 < p < \infty \\ \infty, & \text{si } p = 1 \\ 1, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

Par ailleurs, le conjugué de q est p.

Exercice # 1. Soit E un espace vectoriel normé, et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice # 2. Soit A une partie non-vide d'un espace métrique (X, d). Pour $x \in X$, soit

$$d_A(x) = d(x, A) := \inf\{d(x, a)\,;\, a \in A\}.$$

1. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

   Dans la suite, X est un espace vectoriel muni de la distance induite par une norme $\| \ \|$.
2. Écrire la formule de d_A dans ce cas.
3. Si A est un sous-espace de dimension finie de X, montrer que, pour tout $x \in X$, il existe un $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.
4. De même si A est une partie fermée d'un sous-espace de dimension finie Y de X.
5. Soient $X := C([0, 1], \mathbb{R})$, muni de $\| \ \|_\infty$, et

$$A := \left\{ f \in E\,;\, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

   (a) Calculer $d_A(0)$.

   (b) Montrer que A est fermé, mais que $d_A(0)$ n'est pas atteint.

Exercice # 3. Prouver le lemme de Riesz sous les formes suivantes.

Lemme de Riesz (I). Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit Y un sous-espace vectoriel strict et fermé de X. Soit $0 < \theta < 1$. Montrer qu'il existe un $x \in X$ tel que :

(i) $\|x\| = 1$.

(ii) $\|x - y\| \geq \theta, \forall\, y \in Y$.

Lemme de Riesz (II). Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit Y un sous-espace vectoriel strict et de dimension finie de X. Montrer qu'il existe un $x \in X$ tel que :

(i) $\|x\| = 1$.

(ii) $\|x - y\| \geq 1, \forall\, y \in Y$.

Indications. Dans le premier cas, on pourra considérer un vecteur $e \in X \setminus Y$ de norme 1, un vecteur $f \in Y$ tel que $\|e - f\| \leq \dfrac{1}{\theta} d_Y(e)$, et montrer que $x := \dfrac{1}{\|e - f\|}(e - f)$ convient.

Dans le deuxième cas, on pourra procéder de manière analogue, en considérant un vecteur $f \in Y$ tel que $\|e - f\| = d_Y(e)$.

Exercice # 4. Soit

$$c_0 := \left\{ x = (a_n)_{n \geq 0}\,;\ \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \right\},$$

muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Énoncer proprement et montrer l'égalité $(c_0)' = \ell^1$.

On pourra s'inspirer de l'égalité $(\ell^p)' = \ell^q$.

Exercice # 5. (Dual de L^p, $1 < p < \infty$) Le but de cet exercice est de montrer un cas particulier du résultat suivant, et la stratégie de la preuve de ce résultat dans le cas général.

Théorème de représentation de Riesz. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $1 < p < \infty$. Alors $(L^p(X, \mathscr{T}, \mu))' = L^q(X, \mathscr{T}, \mu)$, au sens suivant : $\varphi \in (L^p(X, \mathscr{T}, \mu))'$ si et seulement si il existe (un unique) $g \in L^q(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que

$$\varphi(f) = \int_X f g \, d\mu, \ \forall\, f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu). \tag{1}$$

De plus, $\|\varphi\| = \|g\|_q$.

Pour simplifier les calculs, nous allons montrer ce résultat si p est un nombre pair. Ceci permet d'obtenir facilement (2) et (3) ci-dessous, dont les analogues, valides pour tout $p > 1$, sont plus difficiles à établir pour un p quelconque. Néanmoins, la stratégie générale de la preuve, présentée dans ce qui suit, est la même pour tout p.

Soit donc p un entier pair.

1. **(Inégalité de Clarkson)**

   (a) Si $r \geq 1$ et $\alpha, \beta \geq 0$, montrer que

   $$(\alpha + \beta)^r \geq \alpha^r + \beta^r,$$
   $$\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^r \leq \frac{1}{2}\alpha^r + \frac{1}{2}\beta^r.$$

   (b) Si $x, y \geq 0$, montrer que $x^p + y^p \leq (x^2 + y^2)^{p/2}$.

   (c) Si $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que

   $$\left(\frac{a + b}{2} \right)^p + \left(\frac{a - b}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p.$$

(d) Si $f, g \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, montrer l'*inégalité de Clarkson*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p. \tag{2}$$

(e) En déduire le résultat suivant : si $(f_j)_{j\geq 1}$ est une suite de $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$ telle que

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j\|_p = \ell < \infty,$$
$$\lim_{j,k\to\infty} \left\|\frac{f_j + f_k}{2}\right\|_p = \ell,$$

alors $(f_j)_{j\geq 1}$ converge dans $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$.

2. **(Projection sur un convexe fermé de $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$)**

(a) Soit $C \subset L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$ un ensemble convexe et fermé. Soit $u \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$. Montrer qu'il existe un unique $v \in C$ tel que

$$\|u - v\|_p = d_C(u) = \inf\{\|u - v\|_p \,;\, v \in C\}.$$

On pourra considérer une suite $(f_j)_{j\geq 1} \subset C$ telle que $\|u - f_j\|_p \to d_C(u)$, et utiliser la question précédente.

(b) Avec les notations ci-dessus, si C est un sous-espace fermé de $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, montrer que

$$\int_X (u - v)^{p-1} f \, d\mu = 0, \; \forall f \in C. \tag{3}$$

On pourra utiliser le fait que la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \|u - v - tf\|_p^p$$

atteint son minimum en $t = 0$.

3. **(Preuve du théorème de représentation de Riesz)**

(a) Si $g \in L^q(X, \mathscr{T}, \mu)$ et φ est définie par (1), montrer que la définition est correcte, que $\varphi \in (L^p(X, \mathscr{T}, \mu))'$ et que $\|\varphi\| = \|g\|_q$.

(b) Réciproquement, soit $\varphi \in (L^p(X, \mathscr{T}, \mu))'$. Supposons que $\varphi \neq 0$ (sinon, on prend $g = 0$). Soient $C := \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ et $u \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$ avec $\varphi(u) = 1$. Soit v comme ci-dessus, et posons $w := (u - v)^{p-1}$, $g := \dfrac{1}{\|u - v\|_p^p} w$. Montrer que $g \in L^q(X, \mathscr{T}\ \mu)$ et que (1) est satisfaite. De plus, montrer que $\|\varphi\| = \|g\|_q$. On pourra au préalable établir et utiliser les propriétés suivantes :

$$\int_X uw \, d\mu = \|u - v\|_p^p,$$
$$\varphi(u) = \int_X ug \, d\mu,$$
$$f - \varphi(f)\, u \in C, \; \forall f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu).$$

Exercice $\#$ 6. (Dual de L^1) Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant, sous une hypothèse légèrement plus forte que celle de l'énoncé.

Théorème de représentation de Riesz. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ σ-finie. Alors $(L^1(X, \mathscr{T}, \mu))' = L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$, au sens suivant : $\varphi \in (L^1(X, \mathscr{T}, \mu))'$ si et seulement si il existe (un unique) $g \in L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que

$$\varphi(f) = \int_X f g \, d\mu, \ \forall f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu). \tag{4}$$

De plus, $\|\varphi\| = \|g\|_\infty$.

Pour simplifier la preuve, nous supposons μ finie. Exercice supplémentaire : expliquer comment traiter, à partir des mesures finies, le cas d'une mesure σ-finie.

1. Montrer que $L^2(X, \mathscr{T}, \mu) \subset L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$.
2. Soit φ une forme linéaire continue sur $L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$. Montrer que la restriction de φ à $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ est une forme linéaire et continue sur $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ muni de la norme $\| \ \|_2$.
3. Montrer qu'il existe $g \in L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que (4) soit satisfaite pour tout $f \in L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$.
4. Soit h une fonction de la classe g. Soit $A := \{x \in X \,;\, |h(x)| > \|\varphi\|\}$. En considérant la classe de $\operatorname{sgn}(h)\, \chi_A$, montrer que $\mu(A) = 0$, et donc $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|$.
5. Conclure.

Exercice $\#$ 7.

1. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Si φ est une forme linéaire (et donc continue) sur E, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\varphi(x) = \|\varphi\|$.
2. En considérant $(C([-1,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ et $\varphi(f) := \displaystyle\int_{-1}^1 t\, f(t)\, dt, \forall f \in C([-1,1], \mathbb{R})$, montrer que le résultat de la question précédente n'est pas nécessairement vrai si E est de dimension infinie.

   Dans ce qui suit, nous mettons en évidence une propriété qui implique l'existence et l'unicité de x comme ci-dessus. Supposons que la propriété suivante est satisfaite :

   (P) si $(x_j)_{j\geq 1}$ est une suite telle que $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \|x_j\| = \ell < \infty$ et $\displaystyle\lim_{j,k\to\infty} \left\| \frac{x_j + x_k}{2} \right\| = \ell$, alors $(x_j)_{j\geq 1}$ converge.

   (Cette propriété est par exemple vraie dans les espaces $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $1 < p < \infty$. Si p est pair, sa validité a été établie dans la question 1 (e) de l'exercice 5.)
3. Montrer que, si $(E, \| \ \|)$ satisfait la propriété (P), alors pour toute forme linéaire et continue non-nulle φ sur E il existe un unique $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\varphi(x) = \|\varphi\|$.
4. Montrer que $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$ et $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$, avec $n \geq 2$, ne satisfont pas (P). De même pour ℓ^1 et ℓ^∞.

5. Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach. Montrer que (P) est impliquée par la propriété suivante, dite de *convexité uniforme* : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tous les $x, y \in E$:

$$\left[\|x\| = 1,\ \|y\| = 1,\ \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta\right] \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

6. En utilisant l'identité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

montrer que tout espace de Hilbert est uniformément convexe, et donc satisfait la conclusion du point 3.

7. **(Projection sur un convexe fermé dans un espace de Banach uniformément convexe)** Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach uniformément convexe. (En particulier, cette hypothèse est satisfaite par les espaces de Hilbert.) Soient $C \subset E$ un convexe fermé et $x \in E$. Alors il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d_C(x)$. $P_C(x) := y$ est la *projection de x sur C*.

Exercice # 8. Montrer qu'un espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.

Exercice # 9. Montrer que c_0 est séparable.

Exercice # 10. Pour cet exercice, nous admettons le résultat suivant : si $(E, \| \|)$ est un espace de Banach tel que E' soit séparable, alors E est séparable.

1. Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach. Supposons qu'il existe une famille I non-dénombrable et des vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ tels que $\|x_i - x_j\| \geq 1, \forall\, i, j \in I$ tels que $i \neq j$. Montrer que E n'est pas séparable.
2. En considérant des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ de la forme

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in A \\ 0, & \text{si } n \notin A \end{cases},$$

avec A partie de $\mathbb{N}$, montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

3. En considérant des (classes de) fonctions de la forme $\chi_{[0,a]}$, avec $0 \leq a \leq 1$, montrer que $L^\infty([0,1])$ n'est pas séparable. Ici, $[0,1]$ est muni de la mesure de Lebesgue.
4. Montrer que $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$ et que $(L^\infty([0,1])' \neq L^1([0,1])$. Y a-t-il des relations d'inclusion entre ces espaces ?

Exercice # 11. Soit $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ le disque unité de $\mathbb{C}$ et

$$E := \{f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}\,;\ f \text{ est continue sur } \overline{\mathbb{D}} \text{ et holomorphe sur } \mathbb{D}\},$$

muni de la norme uniforme $\| \|_\infty$.

1. Montrer que $(E, \| \|_\infty)$ est un espace de Banach (complexe).
2. Si $f \in E$ et $0 < R < 1$, soit $f_R(z) := f(Rz), \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}$. Montrer que $f_R \in E$ et $f_R \to f$ dans E quand $R \to 1$.

3. Montrer que $(E, \| \|_\infty)$ est séparable. On pourra utiliser la question précédente et un développement en série entière de f_R sur $\overline{\mathbb{D}}$.

Exercice # 12. Soit μ une *mesure de Radon* sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, c'est-à-dire une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu(K) < \infty$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$. Un cas particulier important est la mesure de Lebesgue (sur les boréliens).

Rappelons que, pour une telle mesure, nous avons

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K)\,;\ K \subset B \text{ est un compact}\},\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Dans ce qui suit, un cube rationnel est un ensemble de la forme $[a_1, a_1 + \ell[\times[a_2, a_2 + \ell[\times \cdots \times [a_n, a_n + \ell[$, avec $a_1, \ldots, a_n, \ell \in \mathbb{Q}$ et $\ell > 0$.

1. Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier m et de cubes rationnels $C_1, \ldots, C_m$ tels que
   (a) $K \subset C_1 \cup C_2 \ldots \cup C_m$.
   (b) $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $1 \leq i, j \leq m$ et $j \neq i$.
   (c) $\displaystyle\sum_{1 \leq j \leq m} \mu(C_j) < \mu(K) + \varepsilon$.
2. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borélien tel que $\mu(B) < \infty$. Soient $1 \leq p < \infty$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier k et des cubes rationnels $D_1, \ldots, D_k$ tels que

$$\left\| \chi_B - \sum_{1 \leq j \leq k} \chi_{D_j} \right\|_p < \varepsilon.$$

3. En déduire que $(L^p, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$ est séparable.
4. De même si on remplace $\mathbb{R}^n$ par une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.

Exercice # 13. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit F un fermé non-vide de X. Soit $U \neq X$ un ouvert tel que $F \subset U$. Montrer que la fonction

$$X \ni x \mapsto \psi(x) := \frac{d_{U^c}(x)}{d_F(x) + d_{U^c}(x)}$$

   vérifie
   (a) $\psi \in C(X, [0, 1])$.
   (b) $\psi(x) = 1, \forall\, x \in F$.
   (c) $\psi(x) = 0, \forall\, x \in U^c$.

   Adapter cette construction au cas où $F = \emptyset$.
2. En déduire que, pour tout fermé $F \subset X$, il existe une suite $(\psi_j)_{j \geq 1} \subset C(X, [0, 1])$ telle que $\psi \to \chi_F$ simplement.
3. Soient $F \subset X$ un fermé et $U_1, \ldots, U_m$ des ouverts tels que $F \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$. Montrer qu'il existe des fermés $F_1, \ldots, F_m$ tels que :

(a) $F_j \subset U_j, \forall\, 1 \leq j \leq m$.

(b) $F_1 \cup \ldots \cup F_m = F$.

Indication : prendre

$$F_j := \{x \in F\,;\, d(x, (U_j)^c) \geq d(x, (U_i)^c),\ \forall\, i \neq j\}.$$

4. **(Partition de l'unité)** Soit F un fermé de X. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des ouverts tels que $F \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$.

   Montrer qu'il existe des fonctions $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in C(X, [0,1])$ telles que :

   (a) $\zeta_j(x) = 0, \forall\, 1 \leq j \leq m, \forall\, x \in (U_j)^c$.

   (b) $\zeta_1(x) + \cdots + \zeta_m(x) = 1, \forall\, x \in F$.

   Indications :

   i) Pour commencer, supposer que $F \neq X$ et $U_j \neq X, \forall\, 1 \leq j \leq m$.

   ii) Poser $U_0 := F^c$ et $F_0 := (U_1 \cup \ldots \cup U_m)^c$.

   iii) Prendre $F_1, \ldots, F_m$ comme dans la question précédente.

   iv) Associer à F_j et U_j une fonction ψ_j comme dans la question 1, $\forall\, 0 \leq j \leq m$.

   v) Prendre $\zeta_j := \dfrac{\psi_j}{\psi_0 + \psi_1 + \cdots + \psi_m}, \forall\, 0 \leq j \leq m$, et vérifier que les ζ_j, $1 \leq j \leq m$, ont bien les propriétés demandées.

   vi) Traiter séparément les cas où l'un des U_j est X, respectivement $F = X$. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de considérer U_0 et F_0.

   La famille $\{\zeta_j\}_{1 \leq j \leq m}$ est une *partition de l'unité sur F subordonnée au recouvrement ouvert $\{U_j\}_{1 \leq j \leq m}$ de F.*

Exercice # 14. Soit μ une mesure borélienne finie sur K, où (K, d) est un espace métrique compact. Soient $g \in \mathscr{L}^1(K, \mathscr{B}_K, \mu)$ et

$$C(K, \mathbb{R}) \ni f \mapsto \varphi(f) := \int_K f g\, d\mu.$$

On se propose de montrer que, si $C(K, \mathbb{R})$ est muni de la norme uniforme $\| \ \|_\infty$, alors $\|\varphi\| = \|g\|_1$.

1. Si $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe deux compacts disjoints, $K_1, K_2 \subset K$, tels que $g > 0$ sur K_1, $g < 0$ sur K_2, et

$$\int_{K_1} g\, d\mu - \int_{K_2} g\, d\mu > \|g\|_1 - \varepsilon.$$

2. Utiliser la question 2 de l'exercice précédent et le théorème de convergence dominée pour montrer qu'il existe une fonction $f \in C(K, [0,1])$ telle que $\displaystyle\int_K f g\, d\mu > \|g\|_1 - \varepsilon$.

3. Conclure.

4. Généraliser ce résultat :

(a) Au cas où μ est σ-finie.

(b) Au cas où K est remplacé par $\mathbb{R}^n$, et la mesure μ est de Radon.

Exercice # 15. Soit (K, d) un espace métrique compact. Le but de cet exercice est de montrer que $E := C(K, \mathbb{R})$, muni de la norme usuelle $\| \|_\infty$, est séparable.

Dans la preuve, nous allons utiliser le résultat suivant : si $\delta > 0$, alors il existe un ensemble *fini* $A \subset K$ tel que la famille de boules $\{B(a, \delta)\}_{a \in A}$ recouvre K, c'est-à-dire $\cup_{a \in A} B(a, \delta) = K$.

La stratégie de la preuve consiste à établir la propriété suivante :

(P) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace $F = F(\varepsilon)$ de dimension finie de E tel que : $\forall f \in E, \exists g \in F$ tel que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

1. Montrer que (P) implique la conclusion de l'exercice.
2. Soit $f \in E$. Donné $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\delta = \delta(f, \varepsilon) > 0$ tel que :
$$[x, y \in K,\ d(x, y) < \delta] \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
3. Soient f, ε et $\delta > 0$ comme ci-dessus. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset K$ tels que $B(x_1, \delta) \cup \ldots \cup B(x_m, \delta) = K$. Soit $\{\zeta_j\}_{1 \le j \le m}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{B(x_j, \delta)\}_{1 \le j \le m}$ de K. Posons
$$g(x) := \sum_{1 \le j \le m} f(x_j)\zeta_j(x),\ \forall x \in K.$$
Montrer que
$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in K.$$
4. Conclure.

Exercice # 16. (Les inégalités passent à la limite)

1. Soient $1 < p < \infty$ et $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.
Soit $g : X \to \mathbb{R}$ mesurable. Si $(f_j)_{j \ge 0} \subset L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, $f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, et $f_j \to f$ dans $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, montrer que :
$$[f_j \ge g,\ \forall j] \implies f \ge g.$$
On commencera par donner un sens à l'énoncé.
2. Supposons $L^q(X, \mathscr{T}, \mu)$ séparable. Soit $(f_j)_{j \ge 0}$ une suite bornée de $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$.
   (a) Rappeler pourquoi il existe une sous-suite $(f_{j_k})_{k \ge 0}$ et $f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$ tels que
   $$\lim_{k \to \infty} \int_X f_{j_k}\, h\, d\mu = \int_X f\, h\, d\mu,\ \forall h \in L^q(X, \mathscr{T}, \mu).$$
   (b) Pour simplifier l'argument, ici nous supposons μ finie. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que
   $$[f_j \ge g,\ \forall j] \implies f \ge g.$$
   Indication : prendre $A := \{x \in X\ ;\ f(x) < g(x)\}$ et $h := \chi_A$.

Exercice # 17. Soit, dans $L^2(]0,1[,\mathscr{B}_{]0,1[},\lambda_{]0,1[})$, $e_n(x) := e^{\imath nx}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in [0,1]$. Montrer que $e_n \rightharpoonup 0$ et $e_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ quand $n \to \infty$. On commencera par donner un sens aux deux propriétés demandées.

Exercice # 18. Soit $1 < p < \infty$. Soit $(x^j)_{j\geq 0}$, avec $x^j = (a_n^j)_{n\geq 0}$, $\forall\, j$, une suite bornée de ℓ^p. Montrer que $x^j \rightharpoonup x = (a_n)_{n\geq 0}$ si est seulement si $\lim\limits_{j\to\infty} a_n^j = a_n$, $\forall\, n \geq 0$.

De même dans c_0.