Feuille de TD # 3
ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES, THÉORÈME D'ASCOLI

NB. Sauf mention explicite contraire, tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

Exercice # 1. Soit $(P_j)_{j\geq 1}$ une suite uniformément bornée sur $[0,1]$ de fonctions polynomiales de degré $\leq m$. Montrer que $(P_j)_{j\geq 1}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur $[0,1]$.

Dans l'hypothèse, peut-on remplacer $[0,1]$ par un ensemble plus petit ?

Exercice # 2. Soit $(f_j)_{j\geq 1}$ une suite de fonctions $f_j : [0,1] \to [0,\infty[$ convexes, dérivables, telles que $f_j(0) = 0$ et $(f_j)'(1) \leq 1, \forall\, j \geq 1$. Montrer que $(f_j)_{j\geq 1}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f. Que peut-on dire de f ?

Exercice # 3. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non-vide borné et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$C^m(\overline{U},\mathbb{R}) := \{f \in C^m(U,\mathbb{R})\,;\text{ les dérivées partielles d'ordre} \leq m \text{ de } f \\ \text{se prolongent par continuité à } \overline{U}\},$$

muni de

$$\|f\| := \sup\{|\partial^\alpha f(x)|\,;\, x \in U,\ \partial^\alpha \text{ est une dérivée partielle d'ordre} \leq m\}.$$

1. Montrer que $(C^m(\overline{U},\mathbb{R}), \|\ \|)$ est un espace de Banach.
2. Si U est convexe, montrer que $C^1(\overline{U},\mathbb{R})$ est un sous-espace de $(\mathrm{Lip}(U,R), |||\ |||)$ (voir l'exercice 20, feuille 1). (Ici, $\mathbb{R}^n$ est muni de la distance induite par une norme.)

Exercice # 4. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de donner une démonstration alternative du résultat suivant :

Théorème de densité de Weierstrass. Toute fonction $f \in C(K,\mathbb{R})$ est limite uniforme (sur K) d'une suite de fonctions polynomiales.

Rappelons qu'une fonction polynomiale dans $\mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini de monômes de la forme

$$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1)^{m_1}\cdots(x_n)^{m_n},\ \text{avec } m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N}.$$

Le degré d'un monôme comme ci-dessus est $m_1 + \cdots + m_n$. Le degré d'une fonction polynomiale est le maximum des degrés des monômes qui apparaissent dans son expression.

Dans la preuve de ce résultat, nous allons utiliser le résultat suivant, avec

$$\rho(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\|x\|_2^2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Théorème (approximation par convolution). Soit $g \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire, g est continue sur $\mathbb{R}^n$, et il existe un compact $L \subset \mathbb{R}^n$ tel que $g(x) = 0, \forall\, x \in L^c$). Soit $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ une fonction borélienne telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$. Posons

$$\rho_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n}\rho(x/\delta),\ \forall\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors :

(i) $g * \rho_\delta$ est continue et bornée, $\forall\, \delta > 0$.

(ii) $\lim_{\delta \to 0} \|g - g * \rho_\delta\|_\infty = 0$.

Prouver le théorème de Weierstrass comme suit.

1. Soit $f \in C(K, \mathbb{R})$. S'inspirer de la preuve de l'exercice 15, question 3, feuille 2, pour montrer le résultat suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in K$.
2. En déduire qu'il suffit de montrer le théorème de Weierstrass sous la forme suivante : si $g \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynomiale P telle que $|g(x) - P(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in K$.
3. Soit ρ comme dans (1). Soient g, K et $\varepsilon, \delta > 0$ fixés. En utilisant le développement en série de l'exponentielle, montrer qu'il existe un entier $M = M(g, K, \varepsilon, \delta)$ tel que
$$|g * \rho_\delta(x) - g * Q(x)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in K,$$
où
$$Q(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}\delta^n} \sum_{0 \le j \le M} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\|x\|_2^{2j}}{\delta^{2j}}.$$
Pour compléter la preuve, nous allons montrer que $g * Q$ est une fonction polynomiale. Cette conclusion n'utilise pas la forme spécifique de Q, mais uniquement le fait que la fonction Q est polynomiale. Dans ce qui suit, nous considérons donc une fonction polynomiale Q arbitraire.
4. Montrer que $g * Q \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et, si ∂^α est une dérivée partielle, alors $\partial^\alpha(g * Q) = g * (\partial^\alpha Q)$.
5. Soit k le degré de Q. Montrer que les dérivées partielles d'ordre $> k$ de $g * Q$ sont nulles.
6. Soit $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que ses dérivées partielles d'ordre $> k$ soient nulles. Montrer que h est une fonction polynomiale de degré $\le k$. Indication : utiliser la formule de Taylor sous forme intégrale à l'ordre $k + 1$.
7. Conclure.

Exercice # 5. Soit μ une mesure borélienne finie sur $[0, 1]$. Soit $(f_j)_{j \ge 1}$ une suite bornée dans $C^1([0, 1])$ muni de la norme usuelle. Soit $1 \le p \le \infty$. Montrer que $(f_j)_{j \ge 1}$ contient une sous-suite convergente dans $\mathscr{L}^p([0, 1], \mathscr{B}_{[0,1]}, \mu)$.

Exercice # 6. Rappelons les classes suivantes importantes de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(i) f est *lipschitzienne* s'il existe une constante $C < \infty$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Exemple typique : $f(x) := |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $0 < \alpha < 1$, f est α-*hölderienne* s'il existe $C < \infty$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^\alpha$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Exemple typique : $f(x) := |x|^\alpha$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Le but de cet exercice est de montrer que, dans ce qui précède, il n'est pas intéressant de prendre $\alpha > 1$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant : soit $\alpha > 1$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle qu'il existe $C < \infty$ avec

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^\alpha,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

alors f est constante.

Plus généralement, soit $\omega :]0, \infty] \to [0, \infty[$ telle que :

$$\lim_{t \to 0} \omega(t) = 0, \tag{3}$$

$$\text{il existe une suite } t_j \to 0 \text{ telle que } \lim_{j \to \infty} \frac{\omega(t_j)}{t_j} = 0. \tag{4}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $C < \infty$ avec

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,\omega(|x - y|), \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Alors f est constante. (Vérifier que (2) est bien un cas particulier de (3)–(5).)

Voici une stratégie pour prouver ce résultat.

1. Montrer que f est continue (et même uniformément continue).
2. Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ un noyau régularisant (donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$). Montrer que, pour tout $\delta > 0$, $g^\delta := f * \rho_\delta$ satisfait (5).
3. En déduire, en utilisant (4), que g^δ est constante.
4. Conclure.

Exercice $\#$ 7. (Théorème de Peano) Le but de cet exercice est d'établir le résultat suivant.

Théorème de Peano. Soit $f : [t_0, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \to [-c, c]$ une fonction continue. Soit $d := \min(a, b/c)$. Alors il existe $x \in C^1([t_0, t_0 + d], [x_0 - b, x_0 + b])$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)),\ \forall\, t \in [t_0, t_0 + d] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \tag{6}$$

Pour simplifier les calculs, dans ce qui suit nous prenons $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, de sorte que $d = 1$.

Montrer le théorème de Peano en suivant la stratégie suivante. Pour $j \geq 1$, on définit une fonction x_j, sur les intervalles $[k/j, (k+1)/j]$, $k = 0, \ldots, j - 1$, par récurrence sur k, comme suit :

$$\begin{aligned}
&x_j(t) = t\,f(0,0),\ \text{si } 0 \le t \le 1/j\\
&x_j(t) = x_j(1/j) + (t-1/j)f(1/j, x_j(1/j)),\ \text{si } 1/j \le t \le 2/j\\
&\vdots\\
&x_j(t) = x_j(k/j) + (t-k/j)f(k/j, x_j(k/j)),\ \text{si } k/j \le t \le (k+1)/j\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Notons qu'aux points k/j, $1 \le k \le j-1$, x_j est définie deux fois, mais que les deux définitions sont cohérentes.

1. Montrer que :
   (a) $|x_j(k/j)| \le k/j, \forall\, 0 \le k \le j-1$, d'où en particulier la définition de x_j a un sens.
   (b) $|x_j(t) - x_j(s)| \le |t-s|$ et $|x_j(t)| \le t, \forall\, j \ge 1, \forall\, s,t \in [0,1]$.
   (c) Si $0 \le k \le j-1$ et $k/j \le t \le (k+1)/j$, alors
   $$\begin{aligned}x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s))\,ds = &\sum_{0\le \ell \le k-1} \int_{\ell/j}^{(\ell+1)/j} [f(\ell/j, x_j(\ell/j) - f(s, x_j(s))]\,ds\\ &+ \int_{k/j}^{t} [f(k/j, x_j(k/j) - f(s, x_j(s))]\,ds.\end{aligned}$$
   (d) Avec
   $$\begin{aligned}M_j := \sup\{|f(\sigma,u) - f(s,v)|\,;\sigma, s \in [0,1],\ u,v \in [-1,1],\\ |\sigma - s| \le 1/j,\ |u-v| \le 1/j\}.'\end{aligned}$$
   on a
   $$\left| x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s))\,ds \right| \le M_j\, t,\ \forall\, j \ge 1,\ \forall\, t \in [0,1].$$
2. En déduire que la suite $(x_j)_{j\ge1}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $x \in C([0,1],[-1,1])$ qui vérifie
   $$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))\,ds,\ \forall\, t \in [0,1].$$
3. Conclure.