Feuille de TD # 4
Espaces de Hilbert : projection, adjoint, base hilbertienne

NB. Sauf mention explicite contraire, tous les espaces vectoriels considérés sont réels.
NB. Sauf mention explicite contraire, si H est un espace pré-hilbertien, alors $\langle\ ,\ \rangle$, respectivement $\|\ \|$, désignent le produit scalaire, respectivement la norme, sur H.

Exercice # 1. Soient E et F deux sous-espaces fermés orthogonaux d'un espace de Hilbert H. Montrer que $E+F$ est fermé.

Exercice # 2. **(Identités de polarisation)** Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, montrer que, pour tout $x,y\in E$,
$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right].$$
2. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, montrer que, pour tout $x,y\in E$,
$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2-\imath\|x-\imath y\|^2+\imath\|x+\imath y\|^2\right].$$
3. En déduire que l'on peut toujours retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

Exercice # 3. On considère un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2,\ \forall\, x,y\in E.$$

Nous allons montrer qu'il existe un produit scalaire tel que la norme induite soit $\|\ \|$ (théorème de von Neumann). Compte tenu de la question 1 de l'exercice précédent, nous posons
$$\langle x,y\rangle:=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right],\ \forall\, x,y\in E.$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que, pour tout $x,y\in E$, on a $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$, $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$ et $\langle -x,y\rangle=\langle x,-y\rangle=-\langle x,y\rangle$.
2. Montrer que, pour tout $x,y,z\in E$, on a $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$. On pourra commencer par montrer l'égalité suivante : $\langle x+y,z\rangle=2\langle y,z\rangle+\langle x-y,z\rangle$.
3. Montrer, en utilisant la question précédente, que, si $x,y\in E$ et $r\in\mathbb{Q}$, on a $\langle rx,y\rangle=r\langle x,y\rangle$. En utilisant un argument de continuité, montrer que cette égalité est encore valide si $r\in\mathbb{R}$.
4. Conclure.

Exercice # 4. Soient H un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non-vide.

Soit P_C la projection (orthogonale) sur C, c'est-à-dire $P_C(x) :=$ l'unique $y \in H$ tel que $\|x - y\| = d_C(x)$ (voir l'exercice 7, question 7, feuille 2).

1. Soient $x \in H$ et $y \in C$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) $y = P_C(x)$.
   (ii) $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \forall\, z \in C$.

   Indication : si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable, alors 0 est un point de minimum de f si et seulement si $f'(0) \geq 0$. Si cette condition est satisfaite et f est strictement convexe, alors 0 est le le seul point de minimum de f. Appliquer ces considérations à

$$[0,1] \ni t \mapsto f(t) := \|x - [(1-t)y + tz]\|^2.$$

2. En déduire que P_C est 1-lipschitzienne, et en particulier continue.
3. Soit $C := \overline{B}(0, R)$. Montrer que

$$P_C(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq R \\ \dfrac{R}{\|x\|}x, & \text{si } \|x\| > R \end{cases}.$$

4. Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, $x \in H$ et $y \in F$, montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) $y = P_F(x)$.
   (ii) $x - y \in F^{\perp}$.

   En déduire que :
   (a) $H = F \oplus F^{\perp}$.
   (b) Si $x \in H$ et on écrit $x = y + w$, avec $y \in F$ et $w \in F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$.
   (c) P_F est linéaire et continue.
   (d) En particulier, si F est de dimension finie, alors P_F coïncide avec la projection orthogonale sur F telle que définie en algèbre linéaire.
   De même si $F^{\perp}$ est de dimension finie.

Exercice # 5. On munit $\mathscr{B}_{]0,1[}$ de la mesure de Lebesgue $\lambda_{]0,1[}$. Soient $H := L^2(]0,1[, \mathscr{B}_{]0,1[}, \lambda_{]0,1[})$,

$$V := \left\{ f \in H\, ;\, \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^{1/2} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

1. Montrer que V est fermé dans H. Déterminer une base de $V^{\perp}$.
2. Soit $f(x) = x, \forall\, x \in]0,1[$. Calculer la projection orthogonale de f sur V, puis $d(f, V)$.

Exercice # 6. Soient E et F deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H. Montrer que $(E + F)^{\perp} = E^{\perp} \cap F^{\perp}$ et $(E \cap F)^{\perp} = \overline{E^{\perp} + F^{\perp}}$.

Exercice # 7. Soient H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé non-nul. Soit P une projection de H sur F, c'est-à-dire $P : H \to F$ est linéaire et $P(x) = x, \forall\, x \in F$.

Montrer l'équivalence entre

(i) $P = P_F$.

(ii) P est continue et $\|P\| = 1$.

(iii) $|\langle P(x), x\rangle| \leq \|x\|^2, \forall\, x \in H$.

Exercice # 8.

Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Soit

$$C := \{f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)\,;\; f \geq 0\}.$$

1. Redéfinir proprement C.
2. Montrer que C est convexe et fermé.
3. Montrer que, si $f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, alors $g := f\,\chi_{[f\geq 0]}$ est le seul élément de C tel que $\|f - g\|_p = d_C(f)$.
4. Pour $p = 2$, retrouver le résultat de la question précédente en utilisant l'exercice 4, question 1.
5. Que se passe-t-il si $p = \infty$?
6. Mêmes questions pour

$$C := \{f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)\,;\; |f| \leq h\},$$

où $h \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$ est une fonction positive fixée.

Exercice # 9. Si E, F sont des espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $T^* \in \mathscr{L}(F', E')$ est défini par :

$$T^* y'(x) = y'(Tx),\; \forall\, y' \in F',\; \forall\, x \in E.$$

Si H, K sont des espaces de Hilbert de produits scalaires $\langle\ ,\ \rangle$, respectivement $(\ ,\ )$, et $T \in \mathscr{L}(H, K)$, alors $T^* \in \mathscr{L}(K, H)$ est défini par :

$$\langle T^* y, x\rangle = (y, Tx),\; \forall\, y \in K,\; \forall\, x \in H.$$

Montrer que les deux définitions sont compatibles.

Exercice # 10. Pour T, E, F comme ci-dessus, montrer que $T \in \mathscr{L}(E, F)$, et calculer T^* :

1. $F = \mathbb{R}, T \in E'$.
2. $E = F = H$ (espace de Hilbert), T est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé V de H.
3. $E = F = \mathbb{K}^n$ muni de la norme $\|\ \|_2$, et T est de matrice A dans une base orthonormée.
4. $E = F = L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $1 \leq p < \infty$, et $Tf := hf, \forall\, f \in L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $h : X \to \mathbb{R}$ mesurable bornée fixée. (Si $p = 1$, on suppose μ σ-finie.)
5. $E = L^p(Y, \mathscr{S}, \nu)$, $F = L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $1 \leq p < \infty$, μ et ν mesures σ-finies, et

$$Tf(x) := \int_Y K(x,y) f(y)\, d\nu(y),\; \forall\, f \in L^p(Y, \mathscr{S}, \nu),\; \text{pour presque tout } x \in X,$$

où $K : X \times Y \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$-mesurable, dans l'un des cas suivants :

(a) $p = 2$, $K \in L^2(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu)$.

(b) $M_1 := \sup_{x \in X} \int_Y |K(x,y)|\, d\nu(y) < \infty$ et $M_2 := \sup_{y \in Y} \int_X |K(x,y)|\, d\mu(x) < \infty$.

(K est le *noyau intégral de* T.)

Que devient ce résultat si $E = F = \ell^p$?

6. $E = F = \ell^p$, avec $1 \leq p < \infty$, ou $E = F = c_0$, avec $T(x_0, x_1, \ldots) := (0, x_0, x_1, \ldots)$. ($T$ est le *shift*.)

Exercice # 11. Soient H, K des espaces de Hilbert. $T \in \mathscr{L}(H, K)$ est une *isométrie partielle* s'il existe $E \subset H$ un sous-espace fermé tel que $U := T_{|E}$ soit une isométrie et $T_{|E^\perp} = 0$. Pour un tel T, calculer T^* en fonction de U.

Exercice # 12. Soient $1 < p < \infty$ et $T \in \mathscr{L}(\ell^p)$. Montrer qu'il existe des réels $b_{m,n}$, $\forall\, m, n \geq 0$, tels que :

1. $(b_{m,n})_{m \geq 0} \in \ell^q$, $\forall\, n \geq 0$.
2. $(b_{m,n})_{n \geq 0} \in \ell^p$, $\forall\, m \geq 0$.
3. $Tx = \left(\sum_{m \geq 0} b_{m,n} a_m \right)_{n \geq 0}$, $\forall\, x = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^p$.

Déterminer T^*.

Établir le résultat analogue pour $T \in \mathscr{L}(c_0)$.

Exercice # 13. Soient H un espace de Hilbert, $(f_n)_{n \geq 0} \subset H$ une suite orthonormée, $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée.

1. Montrer que la relation

$$Tx := \sum_{n \geq 0} a_n \langle x, f_n \rangle f_n,\ \forall\, x \in H,$$

définit un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$.

2. Calculer T^*.

Exercice # 14.

Soient H un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}(H)$. Montrer l'équivalence entre

(i) u est une isométrie, c'est à dire $\|u(x)\| = \|x\|$, $\forall\, x \in H$.

(ii) $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall\, x, y \in H$.

(iii) $u^* u = \text{Id}$.

Indication : observer que, pour $x, z \in H$,

$$[x = z] \iff [\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle,\ \forall\, y \in H].$$

Exercice # 15. Soient H un espace de Hilbert et $(H_n)_{n \geq 0}$ des sous-espaces mutuellement orthogonaux de H.

1. Soit $x_n \in H_n$, $\forall\, n \geq 0$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} \|x_n\|^2$ converge, et dans ce cas
$$\left\|\sum_{n\geq 0} x_n\right\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|x_n\|^2.$$
2. Si chaque H_n est fermé et si $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ converge, montrer que
$$P_{H_m}\left(\sum_{n\geq 0} x_n\right) = x_m,\ \forall\, m \geq 0.$$

Exercice # 16. Soit H un espace de Hilbert séparable. Montrer que toute famille orthonormée $\mathscr{F} \subset H$ est au plus dénombrable.

Indication : les boules $B(x, \sqrt{2}/2)$, $x \in \mathscr{F}$, sont mutuellement disjointes.

Exercice # 17. On désigne par H l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\imath wt} \in \mathbb{C}$, où w parcourt $\mathbb{R}$.

Soit
$$\langle f, g\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\, dt,\ \forall\, f, g \in H.$$

1. Montrer que $\langle\, ,\rangle$ définit un produit scalaire sur H.
2. Vérifier que la famille $\{e^{\imath wt}\}_{w\in\mathbb{R}}$ est orthonormée.
3. H est-il un espace de Hilbert ?

Exercice # 18. Cet exercice prépare aux questions 3 et 4 de l'exercice suivant. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^p([0,\infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \lambda_{[0,\infty[})$.

1. Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Montrer que la fonction
$$\mathbb{H} \ni z \mapsto F(z) := \int_0^\infty g(t)\, e^{-zt}\, dt \in \mathbb{C}$$
est holomorphe.
2. Soit $a > 0$. On suppose que
$$\int_0^\infty t^n\, g(t)\, e^{-at}\, dt = 0,\ \forall\, n \geq 0. \tag{1}$$
   (a) Montrer que
$$\int_0^\infty g(t)\, e^{-bt}\, dt = 0,\ \forall\, b \in]0, a].$$

(b) En déduire que $F(z) = 0, \forall\, z \in \mathbb{H}$.

(c) En utilisant le fait que la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ est injective, en déduire que $g = 0$.

3. De même, si $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ et on remplace (1) par l'hypothèse

$$\int_\mathbb{R} t^n\, g(t)\, e^{-at^2}\, dt = 0,\ \forall\, n \geq 0,$$

avec $a > 0$, alors $g = 0$.

Exercice # 19. (Bases hilbertiennes de fonctions polynomiales)

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-dégénéré et soit H un espace de Hilbert de (classes d'équivalence de) fonctions sur I tel que l'espace des fonctions polynomiales sur I : (i) s'identifie avec $\mathbb{R}[X]$, (ii) soit contenu dans H, et (iii) soit dense dans H. Si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une famille orthonormée de fonctions polynomiales, avec deg $P_n = n, \forall\, n \geq 0$, montrer que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.
2. On munit $I := [-1, 1]$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\lambda_{[-1,1]}$. Soit $H := L^2([-1, 1], \mathscr{B}_{[-1,1]}, \lambda_{[-1,1]})$. Les *polynômes de Legendre* sont définis par :

$$P_n(x) := \alpha_n \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right],\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, x \in [-1, 1],$$

où les $\alpha_n > 0$ sont des constantes telles que $\|P_n\| = 1, \forall\, n \geq 0$.
Montrer que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.
3. On munit $I := [0, \infty[$ de la tribu borélienne et de la mesure μ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que, dans $L^2([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \mu)$, les *polynômes de Laguerre* :

$$Q_n(x) := \beta_n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n\, e^{-x}),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, x \geq 0,$$

(avec $\beta_n > 0$ constantes convenables) forment une base hilbertienne.
4. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne et de la mesure ν de densité $e^{-x^2/2}$. Montrer que , dans $L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R}, \nu)$, les *polynômes d'Hermite*

$$R_n(x) := (-1)^n \gamma_n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2/2}],\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

(avec $\gamma_n > 0$ constantes convenables) forment une base hilbertienne.

Exercice # 20. Cet exercice prépare aux questions 3 et 4 de l'exercice suivant.
Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-espaces de l'espace de Hilbert H telle que :

(i) E_n est de dimension finie, $\forall\, n \geq 0$.

(ii) $E_n \subset E_{n+1}, \forall\, n \geq 0$.

(iii) $E_0 \cup E_1 \cup \cdots$ est dense dans H.

On pose $E_{-1} := \{0\}$. Soit $\mathscr{F}_n$ une base orthonormée de $E_n \ominus E_{n-1}$, $n \geq 0$. Montrer que $\mathscr{F}_0 \cup \mathscr{F}_1 \cup \cdots$ est une base hilbertienne de H.

Exercice # 21. Soit $H := L^2([0,1[, \mathscr{B}_{[0,1[}, \lambda_{[0,1[})$. Pour $n \geq 0$, soit

$$E_n := \{f : [0,1[\to \mathbb{R}\,;\ f \text{ est constante sur } [j/2^n, (j+1)/2^n[,\ \forall\, j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

1. Montrer que les E_n vérifient les hypothèses de l'exercice précédent.
   Indication pour (iii) : si $f \in C_c(]0,1[)$ et
   $$f_n(x) := f(j/2^n), \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 \leq j \leq 2^n - 1,\ \forall\, x \in [j/2^n, (j+1)/2^n[,$$
   alors $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1[$.
2. Calculer $\dim E_n$, $n \geq 0$.
3. Soit E la fonction partie entière. Montrer que les fonctions
   $$\begin{aligned} w_I(x) &:= (-1)^{E(2^{n_1}x)}(-1)^{E(2^{n_2}x)} \cdots (-1)^{E(2^{n_k}x)}, \\ &\forall\, k \geq 0,\ \forall\, I = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\} \subset \mathbb{N}^* \end{aligned}$$
   (avec la convention $w_\emptyset = 1$), forment une base hilbertienne de H. C'est la *base de Walsh*.
   Indication : si $n \geq 1$, montrer que $\{w_I\,;\ \max I = n\}$ est une famille orthonormée contenue dans $E_n \ominus E_{n-1}$.
4. Si $H_0 := 1$ et, pour $n \geq 0$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$,
   $$H_{j+2^n}(x) := \begin{cases} 2^{n/2}, & \text{si } 2j/2^{n+1} \leq x < (2j+1)/2^{n+1} \\ -2^{n/2}, & \text{si } (2j+1)/2^{n+1} \leq x < (2j+2)/2^{n+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$
   montrer que $\{H_k\}_{k \geq 0}$ est une base hilbertienne de H. C'est la *base de Haar*.

Exercice # 22. Si $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$, on pose

$$X \times Y \ni (x,y) \mapsto f \otimes g(x,y) := f(x)\, g(y).$$

Soient $H := L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $K := L^2(Y, \mathscr{S}, \nu)$, avec μ, ν σ-finies. Si H, K sont séparables, de bases hilbertiennes $\{e_m\}_{m \geq 0}$, respectivement $\{f_n\}_{n \geq 0}$, montrer que $\{e_m \otimes f_n\}_{m,n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu)$.

Indication : montrer que

$$\|h\|_2^2 = \sum_{m,n \geq 0} \langle h, e_m \otimes f_n\rangle^2,\ \forall\, h \in L^2(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu).$$

Exercice # 23. Soit H un espace de Hilbert séparable, et soient $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ deux bases hilbertiennes de H. Montrer que

$$S := \sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_n\|^2 = \sum_n \|Tf_n\|^2 \in [0, \infty].$$

Si H est de dimension finie, $S^{1/2} < \infty$ est la *norme de Frobenius* de T. Si H est de dimension infinie, $S^{1/2} \in [0, \infty]$ est la *norme de Hilbert-Schmidt* de T.

Exercice # 24. Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ tel que $\langle Tx, x\rangle \geq 0, \forall\, x \in H$. Montrer que $\mathrm{Id} + T$ est bijectif.

Indication : considérer

$$a(x, y) := \langle x, y\rangle + \langle Tx, y\rangle,\ \forall\, x, y \in H.$$

Exercice # 25. Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. Montrer que $\mathrm{Id} + T^*T$ est bijectif.

Exercice # 26. On munit $]0, 1[$ de la tribu borélienne $\mathscr{B}_{]0,1[}$ et de la mesure de Lebesgue $\lambda_{]0,1[}$. Soit $H := L^2(]0, 1[, \mathscr{B}_{]0,1[}, \lambda_{]0,1[})$.

1. Si $f \in H$, on pose

$$Tf(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \forall\, x \in [0, 1].$$

Montrer que la définition est correcte et que Tf est une fonction continue.

2. Montrer que, pour tout $g \in H$, il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\int_0^1 f(x)\, h(x)\, dx + \int_0^1 Tf(x)\, Th(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, h(x)\, dx,\ \forall\, h \in H.$$

Exercice # 27. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur *auto-adjoint* et *positif*, c'est-à-dire vérifiant

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle,\ \forall\, x, y \in H,$$
$$\langle Tx, x\rangle \geq 0,\ \forall\, x \in H.$$

Montrer que

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle;\ x \in H,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Indications :

(i) Montrer que $H \times H \ni (x, y) \mapsto \langle Tx, y\rangle$ est un semi-produit scalaire.

(ii) Combien vaut $\max\limits_{\|y\|\leq 1} \langle x, y\rangle$?