Feuille de TD # 4
Exercices corrigés

Exercice # 9. Nous devons montrer le commutativité du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
H' & K' \arrow[l, "T_1^*"'] \\
H \arrow[u, "\Phi_H"] & K \arrow[l, "T_2^*"] \arrow[u, "\Phi_K"']
\end{tikzcd}
$$

où :

(a) T_1^*, respectivement T_2^*, désigne l'adjoint de T selon la première définition, respectivement la seconde.

(b) $\Phi_H x := [H \ni z \mapsto \langle z, x\rangle]$, $\forall\, x \in H$, et $\Phi_K y := [K \ni t \mapsto (t, y)]$, $\forall\, y \in K$.

Si $y \in K$, alors

$$\Phi_H(T_2^* y) = [H \ni x \mapsto \langle x, T_2^* y\rangle] = [H \ni x \mapsto (Tx, y)]$$

et

$$T_1^*(\Phi_K\, y) = (\Phi_K\, y) \circ T = [K \ni t \mapsto (t, y)] \circ T = [H \ni x \mapsto (Tx, y)],$$

d'où la conclusion.

Exercice # 10.

1. En identifiant $\mathbb{R}'$ à $\mathbb{R}$ via

$$\mathbb{R} \ni a \mapsto \varphi_a := [\mathbb{R} \ni t \mapsto a\, t] \in \mathbb{R}',$$

on a $T_2^* : \mathbb{R} \to E'$ et

$$(T_2^* a)(x) = a(Tx) = (aT)(x),\ \forall\, x \in E,$$

d'où $T_2^* a = aT$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, ou encore $T_2^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\, T$.

2. Si $x, y \in H$ et on décompose $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, où $x_1, y_1 \in V$, $x_2, y_2 \in V^\perp$, on a

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, Ty\rangle,$$

d'où $T_2^* = T$.

3. Soient $\{e_j\}_{1\le j\le n}$ la base de l'énoncé et $A=(a_{jk})_{1\le j,k\le n}$ la matrice de T dans cette base. Si $1\le k\le n$, alors

$$\langle Tx, e_k\rangle = \left\langle \sum_{1\le j\le n} \langle x, e_j\rangle T e_j, e_k\right\rangle = \sum_{1\le j\le n} \langle x, e_j\rangle \underbrace{\langle Te_j, e_k\rangle}_{=a_{jk}} = \left\langle x, \sum_{1\le j\le n} a_{jk} e_j\right\rangle,$$

d'où $T_2^* e_k = \sum_{1\le j\le n} a_{jk} e_j$. T_2^* est donc l'application de matrice ${}^t A$ dans la base $\{e_j\}_{1\le j\le n}$.

4. Clairement, $T\in\mathscr{L}(L^p)$ et $\|T\|\le \|h\|_\infty$. Avec l'identification du dual de L^p, nous cherchons $T_2^*\in\mathscr{L}(L^q)$. Si $f\in\mathscr{L}^p$ et $g\in\mathscr{L}^q$,

$$\int_X g\,(Tf) = \int_X g\,(h\,f) = \int_X \underbrace{(\,h\,g\,)}_{\in\mathscr{L}^q} f,$$

et donc $T_2^* g = h\,g, \forall\, g\in L^q$.

5. On élude les questions de mesurabilité.
   (a) Si $f\in Y\to\mathbb{R}$, $g: X\to\mathbb{R}$ et $K: X\times Y\to\mathbb{R}$ sont mesurables, on a (en utilisant deux fois Cauchy-Schwarz et deux fois Tonelli)

$$\begin{aligned}
&\int_{X\times Y} |K(x,y)|\,|f(y)|\,|g(x)|\,d\mu\otimes\nu(x,y)\\
=&\int_X |g(x)| \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\nu(y)\right) d\mu(x)\\
\le&\int_X |g(x)| \left(\int_Y K^2(x,y)\,d\nu(y)\right)^{1/2} \left(\int_Y f^2(y)\,d\nu(y)\right)^{1/2} d\mu(x)\\
=&\|f\|_2 \int_X |g(x)| \left(\int_Y K^2(x,y)\,d\nu(y)\right)^{1/2} d\mu(x)\\
\le&\|f\|_2 \left(\int_X g^2(x)\,d\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_X \left(\int_Y K^2(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)\right)^{1/2}\\
=&\|K\|_2\|f\|_2\|g\|_2.
\end{aligned}$$

   Pour indiquer la dépendance par rapport à K, notons T_K l'opérateur de l'énoncé. De ce qui précède, si $K\in L^2$ et $f\in L^2$, alors

$$\|T_K f\|_2 \le \left\|T_{|K|}|f|\right\|_2 = \sup_{g\in L^2,\,\|g\|_2\le 1} \int_X (T_{|K|}|f|)|g| \le \|K\|_2\|f\|_2,$$

   d'où $T_K\in\mathscr{L}(L^2)$ et $\|T\|\le\|K\|_2$.
   Enfin, le premier calcul justifie l'utilisation du théorème de Fubini dans ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\int_X (Tf(x))\,g(x)\,d\mu(x) &= \int_X \left(\int_Y K(x,y)\,f(y)\,d\nu(y)\right) g(x)\,d\mu(x)\\
&= \int_Y \left(\int_X K(x,y)\,g(x)\,d\mu(x)\right) f(y)\,d\nu(y),
\end{aligned}$$

d'où $(T_K)^*_2 = T_L$, avec $L(y,x) := K(x,y), \forall\, x \in X, \forall\, y \in Y$, et $T_L : L^2(X) \to L^2(Y)$ est défini par

$$(T_L g)(y) := \int_X L(y,x)\, g(x)\, d\mu(x),\ \forall\, g \in {}^2(X), \forall\, y \in Y.$$

(b) Supposons $1 < p < \infty$. (Le cas $p = 1$ demande une petite adaptation des calculs.) Si $f : Y \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables, alors (en utilisant deux fois Hölder et deux fois Tonelli et en raisonnant comme dans l'exercice 13, question 4)

$$\begin{aligned}
&\int_{X\times Y} |K(x,y)|\,|f(y)|\,|g(x)|\, d\mu\otimes\nu(x,y)\\
&= \int_X |g(x)| \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\nu(y)\right) d\mu(x)\\
&\le \int_X |g(x)| \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f|^p(y)\, d\nu(y)\right)^{1/p} \Bigg(\underbrace{\int_Y |K(x,y)|\, d\nu(y)}_{\le M_1}\Bigg)^{1/q} d\mu(x)\\
&\le (M_1)^{1/q} \int_X |g(x)| \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f|^p(y)\, d\nu(y)\right)^{1/p} d\mu(x)\\
&\le (M_1)^{1/q} \left(\int_X |g|^q(x)\, d\mu(x)\right)^{1/q} \left(\int_X \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f|^p(y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)\right)^{1/p}\\
&= (M_1)^{1/q} \|g\|_q \Bigg(\int_Y |f|^p(y) \Bigg(\underbrace{\int_X |K(x,y)|\, d\mu(x)}_{\le M_2}\Bigg) d\nu(y)\Bigg)^{1/p}\\
&\le (M_1)^{1/q} (M_2)^{1/p} \|f\|_p \|g\|_q.
\end{aligned}$$

Comme dans la question précédente, ceci implique que T_K est continu de $L^p(Y)$ vers $L^p(X)$, de norme $\le (M_1)^{1/q}(M_2)^{1/p}$, et que $(T_K)^*_2 = T_L$.

(c) Si $E = F = \ell^p$, les énoncés correspondants sont :

(a) Si $K = (k_{m,n})_{m,n\ge 0}$ est une double suite telle que $\sum_{m,n\ge 0} (k_{m,n})^2 < \infty$ et si

$$T_K (a_n)_{n\ge 0} := \left(\sum_{n\ge 0} k_{m,n} a_n\right)_{m\ge 0},\ \forall\, (a_n)_{n\ge 0} \in \ell^2,$$

alors $T_K \in \mathscr{L}(\ell^2)$ et

$$(T_K)^*_2 (b_m)_{m\ge 0} = \left(\sum_{m\ge 0} k_{m,n} b_m\right)_{n\ge 0},\ \forall\, (b_m)_{m\ge 0} \in \ell^2. \tag{1}$$

(b) Avec les notations ci-dessus,

$$M_1 := \sup_{m\ge 0} \sum_{n\ge 0} |k_{m,n}| < \infty \text{ et } M_2 := \sup_{n\ge 0} \sum_{m\ge 0} |k_{m,n}| < \infty,$$

alors $T_K \in \mathscr{L}(\ell^p), \forall\, 1 \le p < \infty$, et $(T_K)^*_2$ est donné par (1).

6. Clairement T est linéaire et continu, de norme ≤ 1. Si $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, alors

$$\langle T(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}\rangle = \sum_{n\geq 0} a_n\, b_{n+1},$$

et donc

$$T_2^*(b_n)_{n\geq 0} = (b_1, b_2, \ldots,), \forall\, (b_n)_{n\geq 0} \in \ell^2.$$

Exercice # 11. Soit $F := U(E)$. Par abus de notation, on note encore $U : E \to F$ l'application $E \ni x \mapsto T(x) \in F$, qui est une isométrie bijective. Si $x, y \in H$, on écrit $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E$, $x_2 \in E^\perp$, $y = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in F$, $y_2 \in F^\perp$. On a

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle =&\langle Tx_1 + \underbrace{Tx_2}_{=0}, y\rangle = \langle \underbrace{Ux_1}_{\in F}, y_1 + \underbrace{y_2}_{\in F^\perp}\rangle = \langle Ux_1, y_1\rangle = \langle Ux_1, UU^{-1}y_1\rangle\\ =&\langle x_1, \underbrace{U^{-1}y_1}_{\in E}\rangle = \langle x_1 + \underbrace{x_2}_{\in E^\perp}, U^{-1}y_1\rangle = \langle x, U^{-1}P_F y\rangle,\end{aligned}$$

et donc $T_2^* = U^{-1} \circ P_{U(E)}$.

Exercice # 12. On traite uniquement le cas des espaces ℓ^p, avec $1 \leq p < \infty$. Le cas c_0 est analogue (prendre $q = 1$ et identifier ℓ^1 à $(c_0)^*$).

On identifie $z = (c_j)_{j\geq 0} \in \ell^q$ à la forme linéaire continue $\varphi_z \in (\ell^p)^*$,

$$\varphi_z(a_j)_{j\geq 0} := \sum_{j\geq 0} c_j\, a_j, \forall\, (a_j)_{j\geq 0} \in \ell^p.$$

Si $y \in \ell^q$, alors $\varphi_y \circ T \in (\ell^p)^*$ et donc il existe $z \in \ell^q$ tel que $\varphi_y \circ T = \varphi_z$. Dans le cas particulier

$$y = e^n := (\delta_{m,n})_{m\geq 0} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n^{\text{e}} \text{ position}}, 0, \ldots),$$

$(\varphi_{e^n} \circ T)(a_m)_{m\geq 0}$ est la n^{e} coordonnée de $T(a_m)_{m\geq 0}$. De ce qui précède, il existe des suites $(b_{m,n})_{m\geq 0}$, $n \geq 0$, telle que les propriétés 1 et 3 soient vraies.

Pour la propriété 2, notons que $(b_{m,n})_{n\geq 0} = Te^m$, et que $e^m \in \ell^p$.

Calcul de T_2^*. On a

$$(T_1^*\varphi_{e^j})(a_m)_{m\geq 0} = \varphi_{e^j}(T(a_m)_{m\geq 0}) = \sum_{m\geq 0} b_{m,j}\, a_m, \ \forall\, j \geq 0,$$

et donc $T_2^* e^j = (b_{m,j})_{m\geq 0}$. Par linéarité et continuité de T_2^*, on a, $\forall\, (c_n)_{n\geq 0} \in \ell^q$,

$$\begin{aligned}T_2^*(c_n)_{n\geq 0} =& T_2^*\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} c_j\, e^j\right) = \lim_{N\to\infty} T_2^*\left(\sum_{j=0}^{N} c_j\, e^j\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} c_j\, T_2^* e^j\\ =& \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{N} b_{m,j}\, c_j\right)_{m\geq 0} = \left(\sum_{n\geq 0} b_{m,n}\, c_n\right)_{m\geq 0}.\end{aligned}$$

Exercice # 13.

1. Avec $C := \sup_{n\geq 0} |a_n| < \infty$, l'inégalité de Bessel donne
$$\sum_{n\geq 0} \|a_n\langle x, f_n\rangle f_n\|^2 = \sum_{n\geq 0}(a_n)^2\langle x, f_n\rangle^2 \leq C^2\sum_{n\geq 0}\langle x, f_n\rangle^2 \leq C^2\|f\|^2.$$
Il s'ensuit que la série qui donne Tx converge dans H (voir le premier item de l'exercice suivant), et que $\|Tx\| \leq C\|x\|$, $\forall\, x \in H$, d'où T est bien défini, (clairement linéaire) et de norme $\leq C$.
2. Si $x, y \in H$, on a, par symétrie de la formule obtenue,
$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \left\langle \sum_{n\geq 0} a_n\langle x, f_n\rangle f_n, y\right\rangle = \sum_{n\geq 0} a_n\langle x, f_n\rangle\langle f_n, y\rangle\\ &= \sum_{n\geq 0} a_n\langle x, f_n\rangle\langle y, f_n\rangle = \langle y, Tx\rangle,\end{aligned}$$
d'où $T^*_2 = T$.

Exercice # 15. Commençons par établir le résultat un peu plus général suivant, qui implique la partie 1 de l'exercice.

Lemme. Soient H un espace de Hilbert, et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite orthogonale. Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0}\|x_n\|^2$ converge, et dans ce cas
$$\left\|\sum_{n\geq 0} x_n\right\|^2 = \sum_{n\geq 0}\|x_n\|^2. \tag{2}$$

Démonstration. « $\Longrightarrow$ » et preuve de (2). On a
$$\sum_{n\geq 0}\|x_n\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{0\leq n\leq N}\|x_n\|^2 = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{0\leq n\leq N} x_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n\geq 0} x_n\right\|^2 < \infty.$$
« $\Longleftarrow$ » Soit $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que $\sum\limits_{j>n_0}\|x_j\|^2 < \varepsilon^2$. Si $m > n \geq n_0$, alors
$$\left\|\sum_{0\leq j\leq m} x_j - \sum_{0\leq j\leq n} x_j\right\| = \left\|\sum_{n<j\leq m} x_j\right\| = \left(\sum_{n<j\leq m}\|x_j\|^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$
La suite $\left(\sum\limits_{0\leq j\leq n} x_j\right)_{n\geq 0}$ est donc de Cauchy, et par conséquent convergente, dans H. □

2. Si $n \geq m$, on a
$$\sum_{0\leq j\leq n} x_j = x_m + \underbrace{\sum_{0\leq j\leq n, j\neq m} x_j}_{\in (H_m)^\perp},$$

et donc

$$P_{H_m}\left(\sum_{0\leq j\leq n} x_j\right) = x_m,\ \forall\, n \geq m,$$

d'où

$$P_{H_m}\left(\sum_{n\geq 0} x_n\right) = P_{H_m}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{0\leq j\leq n} x_j\right) = \lim_{n\to\infty} P_{H_m}\left(\sum_{0\leq j\leq n} x_j\right) = x_m.$$

Exercice # 16. Si $x, y \in \mathscr{F}$, alors $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$, et donc les boules $B(x, \sqrt{2}/2)$ et $B(y, \sqrt{2}/2)$ sont disjointes. Soit A un ensemble au plus dénombrable dense dans H. Pour chaque $x \in \mathscr{F}$, soit $y \in A \cap B(x, \sqrt{2}/2)$. L'application $\mathscr{F} \ni x \mapsto y \in A$ est injective. Il s'ensuit que $\mathscr{F}$ est au plus dénombrable.

Exercice # 17.

1. Vérifions la séparation. En notant que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{t} e^{\imath w t}\, dt = \begin{cases} 0, & \text{si } w \neq 0 \\ 1, & \text{si } w = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

on trouve que, si $f(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{\imath w_j t}$, alors

$$\langle f, f\rangle = \sum_{1\leq j,k\leq n} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \lambda_j \overline{\lambda_k} e^{\imath(w_j - w_k)t}\, dt = \sum_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|^2, \tag{4}$$

et donc $\langle f, f\rangle = 0 \implies f = 0$.

2. Évident, en utilisant (3).

3. Non. Preuve par l'absurde. Si H est complet, alors la série $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} e^{\imath n t}$ est convergente dans H (voir l'exercice 15 question 1). Notons $f \in H$ sa somme. Alors f est de la forme $\mathbb{R} \ni tt \mapsto f(t) = \sum_{1\leq j\leq k} \lambda_j e^{\imath w_j t}$. Avec $M := \max_{1\leq j\leq k} w_j$, on a, pour tout $n > M$ (en utilisant (4)),

$$\left\|\left[\mathbb{R} \ni t \mapsto \sum_{1\leq \ell\leq n} \frac{1}{\ell} e^{\imath \ell t}\right] - f\right\|^2 \geq \sum_{M<\ell\leq n} \frac{1}{\ell^2} \geq \frac{1}{(M+1)^2},$$

ce qui contredit le fait que $f = \lim_{n\to\infty} \left[\mathbb{R} \ni t \mapsto \sum_{1\leq \ell\leq n} \frac{1}{\ell} e^{\imath \ell t}\right]$.

Exercice # 19.

1. L'hypothèse sur les degrés implique que la famille $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$. Les fonctions polynomiales associées le sont aussi dans H (hypothèses (i) et (ii)). Il s'ensuit que $\{P_0, \ldots, P_m\}$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$ et, par identification, que les fonctions polynomiales associées à $P_0, \ldots, P_m$ forment une base de l'espace des fonctions polynomiales de degré $\leq m$.

   Pour conclure, il reste à montrer que l'espace vectoriel engendré par les (fonctions polynomiales associées aux) P_n est dense dans H. Si $f \in H$ et $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et un $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que $\|f - [I \ni x \mapsto P(x)]\| < \varepsilon$ (hypothèse (iii)). En écrivant $P = \sum_{0\leq j\leq m} a_j P_j$, avec $a_j \in \mathbb{R}$ convenables, on a $\left\| f - \left[I \ni x \mapsto \sum_{0\leq j\leq m} a_j P_j(x)\right]\right\| < \varepsilon$, d'où la conclusion.

3. *Étape 1. Vérification des hypothèses (i)–(iii) de la question 1.* Si $P \in \mathbb{R}[X]$, par croissances comparées l'intégrale généralisée $J := \int_0^\infty [P(x)]^2 \, e^{-x} \, dx$ converge, et donc les fonctions polynomiales sont dans $\mathscr{L}^2$ (hypothèse (i) satisfaite). Par ailleurs, si $J = 0$ alors $P(x) = 0, \forall\, x \geq 0$, et donc $P = 0$ (hypothèse (ii) satisfaite). Pour vérifier (iii), il suffit de montrer que $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$ (où on a identifié polynômes et fonctions polynomiales). Soit $h \in \mathbb{R}[X]^\perp$. Alors en particulier $h \in L^2([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \mu)$, c'est-à-dire

   $$\int_0^\infty [\underbrace{h(x)\, e^{-x/2}}_{:=g(x)}]^2 \, dx < \infty,$$

   d'où $g \in L^2([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \lambda_1)$. Comme $h \in \mathbb{R}[X]^\perp$, nous avons

   $$0 = \langle [[0, \infty[\ni t \mapsto t^n], h\rangle = \int_0^\infty t^n \, h(t) \, e^{-t} \, dt = \int_0^\infty t^n \, g(t) \, e^{-t/2} \, dt, \ \forall\, n \geq 0.$$

   L'exercice 18 question 2 (c) donne $g = 0$, d'où $h = 0$ (hypothèse (iii) satisfaite).

   Étape 2. On a $\deg Q_n = n, \forall\, n \geq 0$. Si $T \in \mathbb{R}[X]$ et $k \geq 0$, on pose

   $$T_k(x) := e^x \frac{d^k}{dx^k}(T(x)\, e^{-x}).$$

   La formule de Leibniz donne

   $$T_k(x) = e^x \sum_{0\leq j\leq k} \binom{k}{j} T^{(j)}(x) \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}(e^{-x}) = \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} T^{(j)}(x), \tag{5}$$

   et donc T_k est une fonction polynomiale de même degré que T, $\forall\, k \geq 0$. Il s'ensuit que $\deg Q_n = n$.

   Étape 3. La suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée. Par construction, Q_n est normé. Si $0 \leq m < n$, l'égalité $\langle Q_m, Q_n\rangle = 0$ suit du fait plus général suivant (appliqué avec $k := n$ et $U := Q_m$) : si $0 \leq k \leq n$, alors

   $$\int_0^\infty U(x) \frac{d^k}{dx^k}[x^n \, e^{-x}] \, dx = (-1)^k \int_0^\infty U^{(k)}(x) \, x^n \, e^{-x} \, dx, \ \forall\, U \in \mathbb{R}[X], \tag{6}$$

et en particulier, si $\deg Q < k \leq n$, alors

$$\int_0^\infty U(x)\frac{d^k}{dx^k}[x^n\, e^{-x}]\, dx = 0.$$

La preuve de (6) se fait par récurrence sur k, l'égalité étant claire si $k = 0$. Passage de k à $k+1$: soit $T := X^n$. En inspectant (5), on a $T_\ell(0) = 0, \forall\, 0 \leq \ell < n$, et donc, si $k+1 \leq n$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty U(x)\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[x^n\, e^{-x}]\, dx &= \left[U(x)\frac{d^k}{dx^k}[x^n\, e^{-x}]\right]_0^\infty - \int_0^\infty U'(x)\frac{d^k}{dx^k}[x^n\, e^{-x}]\, dx \\ &= \left[U(x)T_k(x)\, e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty U'(x)\frac{d^k}{dx^k}[x^n\, e^{-x}]\, dx \\ &= -\int_0^\infty U'(x)\frac{d^k}{dx^k}[x^n\, e^{-x}]\, dx \\ &= (-1)^{k+1}\int_0^\infty U^{(k+1)}(x)\, x^n\, e^{-x}\, dx,\end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence appliquée à U'.

Conclusion. Les Q_n vérifient les hypothèses de la question 1. Ils forment donc une base hilbertienne de $L^2([0,\infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \mu)$.

Exercice # 20. Par construction, $\mathscr{F} := \mathscr{F}_0 \cup \mathscr{F}_1 \cup \cdots$ est une famille orthonormée au plus dénombrable. Elle engendre l'espace $E_0 \cup E_1 \cup \cdots$, car $\mathscr{F}_0 \cup \mathscr{F}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{F}_n$ est une base orthonormée de E_n. De ce qui précède et l'hypothèse (iii), $\mathscr{F}$ est une base hilbertienne de H.

Exercice # 21.

1. Les propriétés (i) et (ii) sont claire. Pour (iii), soient $g \in L^1$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $f \in C_c(]0,1[)$ telle que $\|g - f\|_2 < \varepsilon/2$. Pour $n \geq 1$, soit f_n la fonction de E_n définie par la propriété de l'indication. Alors

$$\begin{aligned}\|f - f_n\|_2 &\leq \sup_{x\in[0,1[} |f(x) - f_n(x)| \\ &\leq \sup\{|f(x) - f(y)|\, ;\, x, y \in [0,1],\ |x - y| \leq 1/2^n\},\end{aligned}$$

   et donc, pour n suffisamment grand, $\|f - f_n\|_2 < \varepsilon/2$. On trouve que $\|g - f_n\|_2 < \varepsilon$, et par ailleurs $f_n \in E_n$.
2. On a $\dim E_n = 2^n, \forall\, n \geq 0$.
4. Clairement, $\mathscr{F}_0 := \{H_0\}$ est une base orthonormée de E_0. Par ailleurs, si $n \geq 1$, $\mathscr{F}_n := \{H_{j+2^n}\}_{0\leq j\leq 2^{n-1}}$ est une famille normée de 2^n fonctions de E_n. Si nous montrons que cette famille est (i) orthogonale et (ii) orthogonale à E_{n-1} alors (grâce à la question 2) $\mathscr{F}_n$ est une base orthonormée de $E_n \ominus E_{n-1}$, et nous pouvons conclure grâce à l'exercice 20.

   Étape 1. $\mathscr{F}_n$ est une famille orthogonale. En effet, si $0 \leq j < k \leq 2^{n-1}$, alors $H_{j+2^n}\, H_{k+2^n} = 0$, d'où $\langle H_{j+2^n}, H_{k+2^n}\rangle = 0$.

   Étape 2. $\mathscr{F}_n \perp E_{n-1}$. En effet, soient $f \in E_{n-1}$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$. Alors f est constante sur $[(2j)/2^n, (2j+2)/2^n[$. Si nous notons C la valeur de cette constante, alors

$$\langle f, H_{j+2^n}\rangle = C\int_{(2j)/2^n}^{(2j+2)/2^n} H_{j+2^n}(x)\, dx = 0.$$

Exercice $\#$ 22. On élude les questions de mesurabilité.

Étape 1. $(e_m \otimes f_n)_{m,n\geq 0}$ est une famille orthonormée de $L^2(X\times Y)$. Le théorème de Tonelli montre que $(e_m \otimes f_n)_{m,n\geq 0}$ est une famille normée de $L^2(X\times Y)$. Par Cauchy-Schwarz, la fonction $(e_{m'} \otimes f_{n'})\,(e_m \otimes f_n)$ est intégrable, $\forall\, m, m', n, n' \geq 0$, et le théorème de Fubini donne alors

$$\langle e_{m'} \otimes f_{n'}, e_m \otimes f_n\rangle = \int_X e_{m'}\, e_m \int_Y f_{n'}\, f_n = \langle e_{m'}, e_m\rangle\langle f_{n'}, f_n\rangle,$$

d'où $(e_m \otimes f_n)_{m,n\geq 0}$ est une famille orthonormée.

Étape 2. Quelques propriétés préliminaires. Soit $h \in L^2(X\times Y)$. Commençons par montrer que $h_m \in L^2(Y)$, où

$$h_m(y) := \int_X h(x,y)\, e_m(x)\, d\mu(x) = \langle h(\cdot, y), e_m\rangle,\ \forall\, m\geq 0.$$

En effet, nous avons (en utilisant l'inégalité de Bessel et le théorème de Tonelli)

$$\|h_m\|_2^2 = \int_Y \langle h(\cdot,y), e_m\rangle^2\, d\nu(y) \leq \int_Y \left(\int_X h^2(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y) = \|h\|_2^2.$$

Montrons par la suite que

$$\langle h_m, f_n\rangle = \langle h, e_m \otimes f_n\rangle, \tag{7}$$

et donc $\|h_m\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} \langle h, e_m \otimes f_n\rangle^2$. L'égalité (7) suit de la définition de h_m et du théorème de Fubini à condition d'avoir

$$I := \int_{X\times Y} |h(x,y)|\, |e_m(x)|\, |f_n(y)|\, d\mu\otimes\nu(x,y) < \infty.$$

Or, par Cauchy-Schwarz et Tonelli,

$$I \leq \|h\|_2 \|e_m \otimes f_n\|_2 = \|h\|_2 \|e_m\|_2 \|f_n\|_2 = \|h\|_2 < \infty.$$

Étape 3. Preuve de l'indication et conclusion. Pour conclure, il suffit de prouver l'identité donnée comme indication. Soit $h \in L^2(X\times Y)$. Nous avons (via l'étape 2 et le théorème de Tonelli)

$$\begin{aligned}\|h\|_2^2 &= \int_Y \left(\int_X h^2(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y) = \int_Y \sum_{m\geq 0} \left(\int_X h(x,y)\, e_m(x)\, d\mu(x)\right)^2 d\nu(y)\\ &= \sum_{m\geq 0} \int_Y [h_m(y)]^2\, d\nu(y) = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} \langle h, e_m \otimes f_n\rangle^2 = \sum_{m,n\geq 0} \langle h, e_m\otimes f_n\rangle^2.\end{aligned}$$

Exercice $\#$ 23. On a

$$\begin{aligned}\sum_n \|Te_n\|^2 &= \sum_n\sum_m \langle Te_n, f_m\rangle^2 = \sum_n\sum_m \langle e_n, T_2^* f_m\rangle^2 = \sum_m\sum_n \langle e_n, T_2^* f_m\rangle^2\\ &= \sum_m\sum_n \langle T_2^* f_m, e_n\rangle^2 = \sum_m \|T_2^* f_m\|^2.\end{aligned}$$

Le résultat étant indépendant du choix de la base hilbertienne $\{e_n\}$, nous avons également la dernière égalité de l'énoncé.

Exercice # 24. Avec a comme dans l'indication, on a

$$a(x,y) = \langle x,y\rangle + \langle Tx,y\rangle = \langle (\mathrm{Id}+T)x,y\rangle,\ \forall\, x,y \in H.$$

Si a vérifie les hypothèses du lemme de Lax-Milgram, il s'ensuit que $\mathrm{Id}+T$ est bijectif.

Or, nous avons

$$|a(x,y)| \le (1+\|T\|)\|x\|\|y\|, \forall\, x,y \in H,$$

et

$$a(x,x) \ge \langle x,x\rangle,\ \forall\, x \in H,$$

d'où la conclusion.

Exercice # 25. Avec $a(x,y) := \langle (\mathrm{Id}+T_2^*T)x,y\rangle, \forall\, x,y \in H$, nous avons

$$|a(x,y)| \le (1+\|T_2^*T\|)\|x\|\|y\|, \forall\, x,y \in H,$$

et

$$a(x,x) = \langle x,x\rangle + \langle T_2^*Tx,x\rangle = \langle x,x\rangle + \langle Tx,Tx\rangle \ge \langle x,x\rangle,\ \forall\, x \in H,$$

d'où la conclusion.

Exercice # 26.

1. Clairement, $Tf(x)$ ne dépend pas du choix du représentant dans la classe de f. Par ailleurs, on a $f \in L^1([0,x])$, et donc $Tf(x)$ est un nombre bien défini et fini. Si $0 \le y < x \le 1$, alors (par Cauchy-Schwarz)

$$|Tf(x) - Tf(y)| = \left|\int_y^x f(t)\,dx\right| \le \sqrt{x-y}\|f\|_2.$$

   Il s'ensuit que f est $(1/2)$-höldérienne, donc en particulier continue.

2. De la question précédente, on a $|Tf(x)| = |Tf(x) - Tf(0)| \le \|f\|_2, \forall\, x \in [0,1]$, et donc en particulier $Tf \in L^2$ et $\|Tf\|_2 \le \|f\|_2$. On conclut en utilisant l'exercice précédent, en notant que

$$\begin{aligned} a(f,h) =& \langle (\mathrm{Id}+T_2^*T)f,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle Tf,Th\rangle \\ =& \int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx + \int_0^1 Tf(x)\,Th(x)\,dx, \forall\, f,h \in L^2. \end{aligned}$$