Université Claude Bernard Lyon 1 — Master Mathématiques générales 1ère année
Année universitaire 2022–2023 — Analyse fonctionnelle 1

Feuille de TD # 4

COMPLÉMENT : ADJOINT D'UN OPÉRATEUR

---

1. Si E, F sont des espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $T^* \in \mathscr{L}(F',E')$ est défini par :
$$T^*y'(x) := y'(Tx),\ \forall\, y' \in F',\ \forall\, x \in E.$$
2. De manière équivalente,
$$T^*y' := y' \circ T \in E',\ \forall\, y' \in F'.$$
3. Concrètement, déterminer T^* revient fixer un $y' \in F'$ et à « expliciter » un $z' \in E'$ tel que
$$y'(Tx) = z'(x),\ \forall\, x \in E.$$
Pour ce z', nous avons $T^*y' = z'$.
4. Si H, K sont des espaces de Hilbert de produits scalaires $\langle\ ,\rangle$, respectivement $(\ ,\ )$, et $T \in \mathscr{L}(H,K)$, alors $T^* \in \mathscr{L}(K,H)$ est défini par :
$$\langle T^*y, x\rangle := (y, Tx),\ \forall\, y \in K,\ \forall\, x \in H.$$
5. Les deux définitions sont compatibles, au sens où le diagramme suivant commute :
$$\begin{tikzcd} H' & K' \arrow[l, "T_1^*"'] \\ H \arrow[u, "\Phi_H"] & K \arrow[l, "T_2^*"] \arrow[u, "\Phi_K"'] \end{tikzcd}$$
Ici,
   (a) $T_1^* \in \mathscr{L}(K',H')$ est la définition de l'adjoint donnée dans le premier item, $T_2^* \in \mathscr{L}(K,H)$ est la définition de l'adjoint donnée dans le quatrième item.
   (b) Φ_H est l'identification de H et de son dual H' donnée par le théorème de Riesz, à savoir $\Phi_H(a)$ est la forme linéaire continue $H \ni x \mapsto \langle x, a\rangle$, $\forall\, a \in H$. De même, $\Phi_K(b)$ est la forme linéaire continue $K \ni y \mapsto (y, b)$, $\forall\, b \in K$.
6. Concrètement, dans le cadre des espaces de Hilbert, on détermine T_2^* au lieu de T_1^*. Ceci revient à fixer $y \in K$ et à trouver un $z \in H$ tel que
$$(y, Tx) = \langle z, x\rangle,\ \forall\, x \in H.$$
Pour ce z, nous avons $T_2^* y = z$, égalité que l'on écrit plutôt $T^*y = z$.

7. On procède de la même manière si le dual de E et/ou F est connu. Dans ces cas, on calcule donc T_2^* plutôt que T_1^*, et on note le résultat T^*.
   Des situations typiques :
   (a) Les espaces $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$ avec $1 < p < \infty$ (donc, en particulier, ℓ^p), dont le dual s'identifie à $L^q(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec q le conjugué de p.
   (b) L'espace L^1 avec μ mesure σ-finie (donc, en particulier, ℓ^1), dont le dual s'identifie à $L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$.
   (c) L'espace c_0, dont le dual s'identifie à ℓ^∞.
8. Quelques exemples.
   (a) Si $1 < p_1, p_2 < \infty$ et

$$L^{p_1}(X_1, \mathscr{T}_1, \mu_1) \xrightarrow{T} L^{p_2}(X_2, \mathscr{T}_2, \mu_2),$$

   alors (avec q_j le conjugué de p_j)

$$L^{q_1}(X_1, \mathscr{T}_1, \mu_1) \xleftarrow{T_2^*} L^{q_2}(X_2, \mathscr{T}_2, \mu_2).$$

   (De même si $p_j = 1$, sous l'hypothèse supplémentaire que μ_j est σ-finie.)
   Concrètement, pour déterminer T_2^*, on fixe $g \in L^{q_2}(X_2, \mathscr{T}_2, \mu_2)$, et on trouve l'unique $h \in L^{q_1}(X_1, \mathscr{T}_1, \mu_1)$ tel que

$$\int_{X_2} g(y)\,(Tf)(y)\,d\mu_2(y) = \int_{X_1} h(x)\,f(x)\,d\mu_1(x),\ \forall f \in L^{p_1}(X_1, \mathscr{T}_1, \mu_1).$$

   Pour cet h, on a $T_2^* g = h$.
   (b) Si $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ et

$$\ell^{p_1} \xrightarrow{T} \ell^{p_2},$$

   alors (avec q_j le conjugué de p_j)

$$\ell^{q_1} \xleftarrow{T_2^*} \ell^{q_2}.$$

   (De même si $p_j = \infty$, à condition de remplacer ℓ^∞ par c_0.)
   Concrètement, pour déterminer T_2^*, on fixe $y = (c_n)_{n\geq 0} \in \ell^{q_2}$, et on trouve l'unique $z = (b_m)_{m\geq 0} \in \ell^{q_1}$ tel que

$$\sum_{n\geq 0} c_n\,d_n = \sum_{m\geq 0} b_m\,a_m,\ \forall x = (a_m)_{m\geq 0} \in \ell^{p_1},$$

   où on a écrit $Tx = (d_n)_{n\geq 0} \in \ell^{p_2}$.
   Pour ce z, on a $T_2^* y = z$.