Feuille de TD # 5
CONVOLUTION, TRANSFORMÉE DE FOURIER DANS L^1 ET L^2

NB. Le cadre est le suivant :

i) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_n. Les espaces L^p et $\mathscr{L}^p$ sont considérés par rapport à ce cadre.

ii) $\cdot$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$.

iii) Dans cette feuille, $|\,|$ est la norme euclidienne usuelle, $\|\,\|_2$, dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice # 1. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions boréliennes. Montrer que $f*g(x) = g*f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, au sens du théorème du changement de variables.

Exercice # 2. Soit ρ un *noyau régularisant standard*, c'est- a-dire :

(i) $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0, \infty[)$.

(ii) $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$.

Soit

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(x/\varepsilon),\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

1. $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ si $|x| < \varepsilon$.
2. $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$.
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

Exercice # 3. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Alors :

1. $f * \varphi$ est défini en tout point.
2. $f * \varphi \in C^k$.
3. Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$, $\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$.
4. Si f est une fonction polynomiale (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est une fonction polynomiale de degré $\leq m$.

Exercice # 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_k < \infty$. Soit $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap \ldots \cap L^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_{j\geq 0} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \to f$ quand $j \to \infty$ dans $L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$.

Exercice # 5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ ne sont pas denses dans $L^\infty(\Omega)$.

Exercice # 6. Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Nous nous proposons de montrer le résultat suivant : si $A, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ satisfont $\lambda_n(A) > 0$, $\lambda_n(B) > 0$, alors l'ensemble $A + B$ contient une boule ouverte non vide.

1. Montrer que l'on peut supposer A et B compacts.
2. Montrer que $f := \chi_A * \chi_B$ est continue.
3. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ et conclure.

Exercice # 7. (Produit de convolution de deux mesures) Soient μ, ν deux mesures boréliennes σ-finies sur $\mathbb{R}^n$. À chaque ensemble borélien E de $\mathbb{R}^n$, nous associons l'ensemble

$$F = F(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,;\, x + y \in E\}.$$

1. Montrer que F est borélien.
2. Montrer que la formule $\xi(E) := \mu \otimes \nu(F), \forall\, E \in \mathscr{B}_{R^n}$, définit une mesure borélienne ξ sur $\mathbb{R}^n$. Cette mesure est le *produit de convolution* des mesures μ et ν, noté $\mu * \nu$.
3. Cette question explique l'une des raisons de s'intéresser au produit de convolution. Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sont deux vecteurs aléatoires indépendants sur un univers Ω, de loi μ, respectivement ν, montrer que $X + Y$ est de loi $\mu * \nu$.
4. Montrer que le produit de convolution est commutatif.
5. Si les mesures boréliennes μ, ν, η sont finies, alors leur produit est associatif.
6. Montrer que δ_0 (la mesure de Dirac en 0) est l'élément neutre de la convolution.
7. Si μ et ν sont des mesures à densités f, respectivement g, par rapport à ν_n, montrer que $\mu * \nu$ a la densité $f * g$.
8. Si μ est à densité f par rapport à ν_n, alors $\mu * \nu$ a la densité $f * \nu$, où
$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, d\nu(y),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 8. (Convolution d'une fonction et d'une mesure) Cet exercice fait suite à l'exercice précédent. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, et ν est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, nous posons, sous réserve d'existence,

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, d\nu(y),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

1. Si $f \in \mathscr{L}^1$ et ν est finie, alors $f * \nu$ est définie λ_n-p. p., et est une fonction Lebesgue intégrable. Indication : théorème de Fubini.
2. Si $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ et ν est une mesure de Radon, alors $f * \nu$ est définie en tout point, et est une fonction de classe C^k.

Exercice # 9. (Équations de Cauchy) Nous considérons les *équations* (fonctionnelles) *de Cauchy* suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\},\ g(x + y) = g(x)\, g(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Un résultat très connu affirme que, si f est une solution *continue* de (2), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = Ax, \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{4}$$

Un résultat un peu moins connu affirme que, si g est une solution *continue* de (3), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = e^{\imath Ax}, \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{5}$$

Ces conclusions ne sont plus vraies s'il n'y a aucune hypothèse sur f et g.

Nous nous proposons de montrer que (4) et (5) restent vraies sous l'hypothèse plus faible que f (ou g) est *borélienne* (ou même *Lebesgue mesurable*). Nous assumons cette hypothèse dans ce qui suit.

Pour commencer, nous admettons la propriété qui suit, qui sera démontrée plus loin.

$$\text{Si } g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}, \text{ alors il existe } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, \psi(y)\, dy \neq 0. \tag{6}$$

1. Soit g solution borélienne de (3). En multipliant (3) par $\psi(y)$, avec ψ comme dans (6) (avec $n = 1$), et en intégrant dans la variable y, montrer que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.
   Puis conclure grâce au préambule de l'exercice.
2. Soit f une solution borélienne de (2). Soit $g := e^{\imath f}$. En utilisant la question précédente pour g, montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tels que
   $$f(x) = Ax + 2\pi\, h(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
3. a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction telle que
   $$h(x + y) = h(x) + h(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$
   (aucune hypothèse de mesurabilité).
   Montrer que $h(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
   b) Conclusion ?
4. Montrons (6). Soit $B := \{y \in \mathbb{R}\,;\ g(y) \neq 0\}$.
   (i) Expliquer pourquoi $\lambda_n(B) > 0$.
   (ii) Montrer qu'il existe $K \subset B$ un compact tel que $\lambda_n(K) > 0$.
   (iii) Soit ρ un noyau régularisant standard. Montrer que (6) est vraie si $\psi := (\operatorname{sgn} g\, \chi_K) * \rho_\varepsilon$, avec ε suffisamment petit. Indication : convergence dominée.
5. Généraliser ce qui précède à des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$.

Exercice # 10. Dans les questions suivantes, montrer au préalable que les définitions des objets f_ε, $\tau_h f$, etc., ont un sens. Soit $f \in L^1 = L^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\, f(x/\varepsilon), \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que $f_\varepsilon \in L^1$.
   (b) Montrer que $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\, \xi)$.

(c) Montrer que $|\widehat{f_\varepsilon}(\xi)| \le \|f\|_1, \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

2. Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Soit $\tau_h f(x) := f(x-h), \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que $\tau_h f \in L^1$.
   (b) Montrer que $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-\imath h\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi), \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.
3. (a) Montrer que $\overline{f} \in L^1$.
   (b) Montrer que $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}}(-\xi), \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.
4. Soit $\check{f}(x) := f(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que $\check{f} \in L^1$.
   (b) Montrer que $\widehat{\check{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \check{\widehat{f}}(\xi), \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Exercice # 11. Avec les notations de l'exercice précédent, sur $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ nous avons

$$\mathscr{F}^* f = \widecheck{\mathscr{F} f}, \forall\, f \in L^2.$$

On pourra commencer par calculer $\langle \mathscr{F} f, g\rangle$, avec $f, g \in L^1 \cap L^2$.

Exercice # 12.

1. Soit $a > 0$. Soit $g^a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^a(x) := e^{-a\,x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer $h^a := \widehat{g^a}$.
   Rappelons que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \pi^{1/2}$.
   (a) Montrer que $g^a \in \mathscr{L}^1$ et calculer $h^a(0)$.
   (b) Montrer que $h^a \in C^1$ et donner la formule de $(h^a)'$.
   (c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $(h^a)'(\xi) = -\dfrac{\xi\, h^a(\xi)}{2a}$. Indication : $x\, e^{-ax^2} = -1/(2a)\, \left(e^{-a\,x^2}\right)'$.
   (d) Obtenir la formule $\widehat{e^{-a\,x^2}}(\xi) = (\pi/a)^{1/2}\, e^{-\xi^2/(4a)}$.
   Sous une forme plus compacte, nous avons $\widehat{g^a}(\xi) = (\pi/a)^{1/2}\, g^{1/(4a)}(\xi)$.
2. Plus généralement, soit $g^a(x) := e^{-a\,|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\widehat{g^a}(\xi) = (\pi/a)^{n/2}\, g^{1/(4a)}(\xi)$, $\forall\, a > 0, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, définie positive. Soit $f(x) := e^{-(Ax)\cdot x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. En utilisant la question précédente et un changement linéaire de variables, montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-(A^{-1}\xi)\cdot\xi/4},\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 13. Voici une autre méthode, inspirée de l'analyse complexe, pour calculer la transformée de Fourier des gaussiennes.

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $F(s) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+\imath s)^2}\, dx$.

1. Montrer que F est bien définie et de classe C^1.
2. Montrer que F est constante.
3. En déduire la formule de la transformée de Fourier de $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-x^2}$.

Exercice # 14. Dans $\mathbb{R}$, soit $f := \chi_{[0,1]}$. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1$ mais que $\widehat{f} \notin \mathscr{L}^1$. En déduire que la formule d'inversion de Fourier ne s'applique pas à tout l'espace L^1.

Exercice # 15. Rappelons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$. (Il s'agit d'une intégrale généralisée.)

Soit f la question de l'exercice précédent.

1. Montrer que
$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{\imath x\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$
2. Voyez-vous un lien entre la formule ci-dessus et le fait que $f \in \mathscr{L}^2$?

Exercice # 16.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\widehat{f}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\widehat{g}$.

Exercice # 17. Soit $\lambda > 0$. Soit
$$f(x) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, (4\pi\, t)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/(4t)}\, dt,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1$.
2. Calculer $\widehat{f}$.

Exercice # 18. (Résolution de l'équation de Helmholtz) Soit f la fonction de l'exercice précédent. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $f * g \in \mathscr{L}^1$.
2. Soit Δ le *laplacien*, c'est-à-dire $\Delta u(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_1)^2}(x) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_2)^2}(x) + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_n)^2}(x)$, $\forall\, u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Calculer $\mathscr{F}[(f * (\lambda g - \Delta g)]$.
3. Trouver une solution $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de l'*équation de Helmholtz* $\lambda h - \Delta h = g$.

Exercice # 19.

1. Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'identité
$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\imath x\xi}}{1+\xi^2}\, d\xi, \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

3. En utilisant (7) et l'identité $\dfrac{1}{1+\xi^2} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(1+\xi^2)t}\,dt$, obtenir l'identité
$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}e^{-x^2/(4t)}\,dt,\ \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$
4. En utilisant la question précédente, montrer que la transformée de Fourier de $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto e^{-a|x|}$, avec $a>0$ constante, est donnée par
$$\widehat{e^{-a|x|}}(\xi) = \frac{2^n\pi^{(n-1)/2}a}{(a^2+|\xi|^2)^{(n+1)/2}}\int_0^\infty s^{(n-1)/2}e^{-s}\,ds = \frac{2^n\pi^{(n-1)/2}\Gamma((n+1)/2)a}{(a^2+|\xi|^2)^{(n+1)/2}},$$
$$\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Exercice # 20. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := (\operatorname{sgn} x)\,e^{-|x|}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
2. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $g(x) := \dfrac{1}{x+\imath}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Exercice # 21.

1. Soit $f\in\mathscr{L}^1$ une fonction « radiale », c'est-à-dire de la forme $f(x) = g(|x|)$ pour une fonction borélienne $g:]0,\infty[\to\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est radiale.
2. Même propriété si $f\in L^2$.

Exercice # 22.

1. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t) := \begin{cases}(1-t^2)^{-1/2}, & \text{si } |t|<1\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$. Montrer que $g\in\mathscr{L}^1$.
2. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases}|x|, & \text{si } |x|<1\\ 0, & \text{si } |x|\geq 1\end{cases}$. Calculer $\widehat{f}(\xi)$ en fonction de $\widehat{g}$, $\forall\,\xi\in\mathbb{R}^2$.
   On pourra utiliser l'exercice précédent et calculer uniquement $\widehat{f}(t,0)$, avec $t\geq 0$.

Exercice # 23. Soit $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,\ \forall\, -\infty<a<b<\infty, \tag{9}$$
nous allons montrer que $f=0$ λ_1-p. p.

1. Soit ρ un noyau régularisant standard. Montrer que $f*\rho_\varepsilon$ vérifie (9), $\forall\,\varepsilon>0$.
2. En déduire que $f*\rho_\varepsilon = 0$, $\forall\,\varepsilon>0$.
3. Conclure.

Exercice # 24. Nous considérons l'égalité
$$\widehat{f*g} = \widehat{f}\,\widehat{g}. \tag{10}$$

a) Donner un sens à (10) si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(R^n)$, et la montrer.

b) Donner un sens à (10) si $f \in L^2$ et $g \in L^1$, et la montrer. On pourra commencer par $f \in L^1 \cap L^2$.

c) Si $f, g \in L^1 \cap L^2$, montrer que

$$f * g(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x \cdot \xi}\, \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

d) De même si $f, g \in L^2$.

Exercice # 25. Rappelons le résultat suivant. Si $f \in C^k(\mathbb{R})$ et si $f^{(j)} \in \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}), \forall\, 0 \leq j \leq k$, alors

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (\imath\xi)^\alpha\, \widehat{f}(\xi),\ \forall\, 0 \leq j \leq k. \tag{12}$$

Nous nous proposons ici de montrer que, pour $k \geq 2$, il y a trop d'hypothèses dans ce résultat, et qu'il suffit de supposer que $f \in C^k(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{L}^1$ et $f^{(k)} \in \mathscr{L}^1$.

Plus spécifiquement, nous allons montrer que

$$[f \in C^k(\mathbb{R}),\ f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}),\ f^{(k)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})] \implies [f' \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}), \ldots, f^{(k-1)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})]. \tag{13}$$

1. Prenons d'abord $k = 2$. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$.
   (a) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et f'' en utilisant la formule de Taylor à l'ordre deux sous forme intégrale au point x. En déduire une formule pour $f'(x)$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f'\|_1 \leq C(\|f\|_1 + \|f''\|_1)$, et conclure.
   (c) En déduire (13) pour $k = 2$.
2. Soit maintenant $k \geq 3$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$.
   (a) En utilisant la formule de Taylor à l'ordre k sous forme intégrale au point x, exprimer $f(x+1), f(x+2), \ldots, f(x+k-1)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$ et $f^{(k)}$. En déduire des formules pour $f'(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f'\|_1 + \cdots + \left\|f^{(k-1)}\right\|_1 \leq C(\|f\|_1 + \left\|f^{(k)}\right\|_1)$, et conclure.

Exercice # 26. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\underbrace{f * f \cdots * f}_{n \text{ fois}}$.

Exercice # 27.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) := x f(x) \in \mathscr{L}^1$, montrer que $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ et que $\widehat{g} = \imath \widehat{f}\,'$.
2. Si $\varepsilon > 0$, calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{R} \ni x \mapsto h_\varepsilon(x) := \dfrac{e^{-\varepsilon x^2}}{x + \imath}$. Indication : se débarrasser du dénominateur.
3. Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) := \dfrac{1}{x + \imath}$.

Exercice # 28. (Transformée de Fourier dans L^p, $1 < p < 2$) Rappelons que, si $f \in \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f} \in \mathscr{L}^\infty$, alors que, si $f \in L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut définir $\widehat{f}$ comme un élément de L^2 (théorème de Plancherel). Nous nous proposons de montrer un résultat similaire pour l'espace L^p, avec $1 < p < 2$. Plus spécifiquement, nous allons montrer que, si $1 < p < 2$, il existe $C_p < \infty$ telle que

$$\left\|\widehat{f}\right\|_q \leq C_p \|f\|_p, \ \forall\, f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}). \tag{14}$$

Ici, q est le conjugué de p.

Le *théorème de Hausdorff-Young* affirme que (14) est vraie avec $C_p = (2\pi)^{n/q}$ (qui est une constante inférieure à celle obtenue par la calcul explicite ci-dessous).

La constante $(2\pi)^{n/q}$ n'est pas la meilleure. Le (très difficile) *théorème de (Babenko-)Beckner* affirme que la meilleure constante est $C_p = (2\pi)^{n/q} \dfrac{p^{n/(2p)}}{q^{n/(2q)}}$.

Nous allons, plus modestement, établir l'existence d'une constante $C_p < \infty$ telle que (14) soit valide.

Rappelons que, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne, alors la *fonction de distribution de f* est

$$F(t) = F_f(t) := \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |f(x)| > t\}), \ \forall\, t > 0.$$

1. Montrer que $F : [0, \infty[\to [0, \infty]$ est borélienne.
2. Pour $1 \leq p < \infty$, montrer la formule $\|f\|_p^p = p \displaystyle\int_0^\infty t^{p-1}\, F(t)\, dt$.
3. Si $1 \leq p < \infty$ et $t > 0$, montrer l'*inégalité de Markov* $F(t) \leq \dfrac{\|f\|_p^p}{t^p}$.

   À partir de maintenant, nous supposons $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
4. Montrer que $0 < \|f\|_r^r < \infty, \forall\, 1 \leq r < \infty$.
5. Pour $a > 0$, soient

$$g_a(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leq a \\ a, & \text{si } f(x) > a \\ -a, & \text{si } f(x) < -a \end{cases}, \ h_a(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } |f(x)| \leq a \\ f(x) - a, & \text{si } f(x) > a \\ f(x) + a, & \text{si } f(x) < -a \end{cases}.$$

   (a) Montrer que $g_a, h_a \in C_c(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Calculer $\|g_a\|_2^2$ et $\|h_a\|_1$ en fonction de F_f.
   (c) Montrer que

$$\|h_a\|_1 \leq \frac{1}{p\, a^{p-1}} \|f\|_p^p, \ \forall\, a > 0, \ \forall\, 1 < p < \infty.$$

   (d) Soit $t > 0$. Nous définissons $a = a(t) > 0$ comme la solution positive de

$$\frac{1}{p\, a^{p-1}} \|f\|_p^p = \frac{t}{2}.$$

Montrer que, pour cet a, nous avons

$$|\widehat{h_a}(\xi)| \leq \frac{t}{2}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n\,;\, |\widehat{f}(\xi)| > t\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n\,;\, |\widehat{g_a}(\xi)| > t/2\}. \tag{15}$$

6. Soit $1 < p < 2$. En utilisant (15), le théorème de Plancherel et l'inégalité de Markov, montrer l'existence d'une constante $C_p < \infty$ (dont on donnera la valeur) telle que (14) soit satisfaite.
7. En utilisant (14), montrer le résultat suivant, après lui avoir donné un sens précis : la transformée de Fourier est continue de L^p vers L^q.

Exercice # 29. (Inégalités de Nikolski'ĭ) Le thème de cet exercice est le suivant : des inégalités entre les normes $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_r$, qui sont fausses *en général*, sont vraies *sous des hypothèses concernant le support de la transformée de Fourier*.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Pour commencer, nous faisons l'hypothèse

$$f \in \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n), \tag{16}$$

qui permet de considérer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f ; cette hypothèse peut être affaiblie, mais ceci demande de travailler dans le cadre des *distributions tempérées*.

L'hypothèse *essentielle* est

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \tag{17}$$

(avec $0 < R < \infty$ constante arbitraire).

Sous ces hypothèses, nous nous proposons de montrer les *inégalités de Nikolskiĭ directes*

$$\|f\|_r \leq C_1 R^{n(1/p-1/r)}\, \|f\|_p, \ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{18}$$

$$\|\partial_j f\|_r \leq C_2 R^{n(1/p-1/r)+1}\, \|f\|_p, \ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \ \forall\, 1 \leq j \leq n, \tag{19}$$

où $C_1, C_2 < \infty$ sont des constantes qui peuvent dépendre de n, p et r, mais pas de f ou R. Au passage, sous les hypothèses (16) et (17), nous montrerons que $f \in C^1$.

Sous l'hypothèse, *plus forte* que (17),

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \text{ ou si } |\xi| \leq \frac{R}{2}, \tag{20}$$

nous avons également l'*inégalité de Nikolskiĭ inverse*, énoncée et prouvée, *par souci de simplicité*, uniquement si $n = 1$:

$$\|f\|_r \leq C_3 R^{1/r-1/p-1}\, \|f'\|_p, \ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{21}$$

où C_3 est une constante *finie* qui peut dépendre de p et r, mais pas de f ou R.

Voici la démarche proposée pour montrer (18), (19) et (21).

1. **(Argument de changement d'échelle)** En supposant l'une de trois inégalités vraie pour $R = 1$, elle est vraie pour *tout* R. Voici l'argument pour (18). Soit f une fonction vérifiant (16) et (17). Soit (avec les notations de l'exercice 2) $g := f_R$.
   (a) Montrer que g vérifie les hypothèses (16) et (17), la dernière pour $R = 1$.
   (b) En appliquant (18) (supposée vraie si $R = 1$) à g, et en calculant $\|g\|_r$, respectivement $\|g\|_p$, en fonction de $\|f\|_r$, respectivement $\|f\|_p$, obtenir (18) pour f.
   (c) Vérifier que la même démarche est valide pour (19) et (21).
2. **(Preuve de** (18) **si** $R = 1$**)**
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in \mathscr{L}^1$ telle que $\widehat{\psi} = \varphi$.
   (c) Montrer que, de plus, $\psi \in \mathscr{L}^\infty$.
   (d) Montrer que $\psi \in \mathscr{L}^q, \forall\, 1 \leq q \leq \infty$.
   (e) Soit f vérifiant (16) et (17) avec $R = 1$. Montrer que $f = f * \psi$. Indication : prendre la transformée de Fourier dans cette égalité.
   (f) Si $1 \leq p, q, r \leq \infty$ sont tels que $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, montrer que $\|f\|_r \leq \|\psi\|_q \|f\|_p$.
   (g) Conclure.
3. **(Preuve de** (19) **si** $R = 1$**)**
   (a) Montrer successivement que $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\partial_j \psi \in \mathscr{L}^1$, $\widehat{\partial_j \psi}(\xi) = \imath \xi_j\, \varphi(\xi), \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\partial_j \psi \in \mathscr{L}^\infty$, et $\partial_j \psi \in \mathscr{L}^q, \forall\, 1 \leq q \leq \infty, \forall\, 1 \leq j \leq n$.
   (b) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et que $\partial_j f = f * \partial_j \psi, \forall\, 1 \leq j \leq n$.
   (c) Conclure.
4. **(Preuve de** (21) **si** $R = 1$**)** D'après les questions précédentes, nous savons que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et que $f' \in \mathscr{L}^p$ (et, par ailleurs, que $f' \in \mathscr{L}^1$). Il reste à montrer (21).
   (a) Montrer qu'il existe $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que
   $$\zeta(\xi) = \frac{1}{\imath \xi},\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1.$$
   (b) Montrer qu'il existe $\eta \in \mathscr{L}^1$ telle que $\widehat{\eta} = \zeta$.
   (c) Montrer que $f = f' * \eta$.
   (d) Conclure, sur le modèle des questions précédentes.