Feuille de TD # 7
DISTRIBUTIONS, ESPACES DE SOBOLEV

NB. Le cadre est le suivant :

i) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$), muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_n. Les espaces L^p et $\mathscr{L}^p$ sont considérés par rapport à ce cadre.

ii) $\cdot$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$.

iii) Dans cette feuille, $|\ |$ est la norme euclidienne usuelle, $\|\ \|_2$, dans $\mathbb{R}^n$.

iv) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (α est un *multi-indice*) et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $x^\alpha := (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n}$.

v) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$.

vi) Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\partial^\beta f(x) := \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}(x).$$

vii) Pour $1 \le j \le n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\partial_j f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Exercice # 1. (Masse de Dirac) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on définit la *masse de Dirac* en a par

$$\delta_a : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},\ \delta_a(\varphi) = \varphi(a),\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

1. Montrer que δ_b est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $f\delta_a = f(a)\delta_a$.

Exercice # 2. (Lemme de Hadamard) Cet exercice prépare à l'exercice suivant.

1. Soit $\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\lambda(0) = 0$. Soit

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \eta(x) := \begin{cases} \dfrac{\lambda(x)}{x}, \text{si } x \neq 0 \\ \lambda'(0), \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On pourra commencer par montrer que $\eta(x) = \displaystyle\int_0^1 \lambda'(tx)\, dt$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2. Soient $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, avec $\psi(0) = 1$. Montrer qu'il existe $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(x) = \varphi(0)\psi(x) + x\eta(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 3. (vp $(1/x)$ (valeur principale de $1/x$))

1. Avec les notations l'exercice précédent, si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et ψ est paire, montrer que

$$\text{vp}(1/x)(\varphi) := \lim_{\varepsilon \geq 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \eta(x)\, dx.$$

   L'application vp$(1/x)$ ainsi définie sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est la *valeur principale de* $1/x$.

2. Montrer que vp$(1/x)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $x\,\text{vp}(1/x) = 1$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
4. **(Formule de Plemelj)** Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x + \imath\varepsilon} = \text{vp}(1/x) - \imath\pi\delta \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercice # 4. Cet exercice prépare à l'exercice suivant. Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $x^1, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus (B(x^1,\varepsilon) \cup \ldots \cup B(x^k,\varepsilon))} f(x)\, dx.$$

Exercice # 5.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. Montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$, la dérivée au sens des distributions $\partial_j f$ existe et est égale à la dérivée usuelle $\partial_j f$.
2. Montrer qu'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ a une dérivée au sens des distributions qui coïncide avec sa dérivée usuelle.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. On suppose de plus que sa dérivée usuelle f' est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que f' est la dérivée au sens des distributions de f.

Exercice # 6. Calculer la dérivée au sens des distributions des fonctions suivantes de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$: a) $x \mapsto |x|^\alpha$, avec $\alpha > -1$, b) $x \mapsto \text{sgn}\, x$, c) $x \mapsto \ln|x|$.

Exercice # 7. Soient $f \in C^\infty(I)$ et $T \in \mathscr{D}'(I)$, avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert. Montrer que $(fT)' = f'T + fT'$.

Exercice # 8. Soit $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$.

1. Soit $\lambda \in C_c^\infty(I)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) Il existe (une unique) $\eta \in C_c^\infty(I)$ telle que $\lambda = \eta'$.
   (b) $\displaystyle\int_I \lambda(x)\, dx = 0$.
2. Soient $\varphi, \psi \in C_c^\infty(I)$ telles que $\displaystyle\int_I \psi(x)\, dx = 1$. Montrer qu'il existe $\eta \in C_c^\infty(I)$ telle que

$$\varphi = \left(\int_I \varphi(x)\, dx \right) \psi + \eta'.$$

3. Soit $T \in \mathscr{D}'(I)$ telle que $T' = 0$. Avec ψ comme ci-dessus, montrer que $T = C$, où $C := T(\psi)$. On commencera par donner un sens à l'égalité $T = C$.
4. Réciproquement, si $T \in \mathscr{D}'(I)$ est constante, alors $T' = 0$.
5. Énoncer proprement et montrer la propriété suivante : les primitives d'une distribution sur I diffèrent par une constante.
6. Soient $g \in L^1_{loc}(I)$, $x_0 \in I$, $C \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) := C + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$, pour tout $x \in I$. Montrer que $f \in C(I)$ et $f' = g$. En déduire que cette formule donne toutes les primitives de g.
7. De même, si $g \in L^1_{loc}([a, b[)$, alors toutes les primitives de g sont de la forme $f(x) := C + \displaystyle\int_{a}^{x} g(t)\,dt$, pour tout $x \in I$.
8. Avec les notations de la question 2, si $T \in \mathscr{D}'(I)$, montrer que

$$C_c^\infty(I) \ni \varphi \mapsto U(\varphi) := -T(\eta)$$

définit une primitive de T. Trouver toutes les primitives de T.

Exercice # 9. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $u' + \alpha u = 0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $u(t) = Ce^{-\alpha t}$. On donnera un sens à cette égalité.

Exercice # 10. Soit $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$. Si $T \in \mathscr{D}'(I)$ et $\alpha \in C^\infty(I)$, résoudre l'équation $u' + \alpha u = T$, d'inconnue $u \in \mathscr{D}'(I)$. Indication : utiliser la méthode de la variation de la constante et l'exercice 7.

Exercice # 11.

1. Trouver une solution de

$$E'' + E = \delta \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}), \tag{1}$$

d'abord formellement, en utilisant la méthode de la variation de la constante.
Justifier que la distribution E ainsi trouvée est bien une solution de (1).

2. On considère l'équation

$$u'' + u = f \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Montrer que $u := E * f$ est solution de (2) :
   (a) Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.
   (b) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice # 12.

1. Soit $n \geq 2$, $1 \leq j \leq n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. On suppose de plus que $\partial_j f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (dérivée usuelle). Montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et que les $\partial_j f$ sont les dérivées partielles au sens des distributions de la distribution f.
2. Une surprise, si on compare ce qui précède à l'exercice 5, question 3 ?

3. (a) Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x) := \dfrac{1}{|x|}$. Montrer que, dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$, $\partial_j h(x) = -\dfrac{x_j}{|x|^3}$.

   (b) Etudier l'existence des dérivées dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1}{|x|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice # 13. (De l'impossibilité de multiplier deux distributions) Calculer $(x\,\delta)\,\mathrm{vp}\,(1/x)$ et $(x\,\mathrm{vp}\,(1/x))\,\delta$. Conclusion ?

Notations pour les exercices 14–19.

i) $1 \leq p < \infty$.

ii) Si $u \in \mathscr{D}'(I)$, avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, u' désigne la dérivée au sens de $\mathscr{D}'(I)$ de u.

iii) $W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I)\ ;\ u' \in L^p(I)\}$, muni de $\|u\|_{W^{1,p}} := (\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p)^{1/p}$.

iv) $W_0^{1,p}(I)$ est l'adhérence de $C_c^\infty(I)$ dans $W^{1,p}(I)$, muni de la norme induite de $W^{1,p}(I)$.

v) Pour $p = 2$, on note $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ et $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

Exercice # 14.

1. Montrer que les espaces ci-dessus sont des espaces de Banach.
2. Pour $p = 2$, montrer que ce sont des espaces de Hilbert.
3. Trouver une norme équivalente plus sympathique.

Exercice # 15.

1. Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$u(y) = u(x) + \int_x^y u'(t)\,dt \text{ pour } \lambda_1\text{−presque tout } y \in I.$$

   À partir de cette question, $I =]-1, 1[$ (mais les résultats s'adaptent à tout intervalle borné).

2. Montrer que $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C([-1,1])$, au sens suivant :

   (a) Toute classe $u \in W^{1,p}(I)$ a un (et un seul) représentant, encore noté, par abus, u, continu sur $[-1, 1]$.

   (b) Il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |u(x)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}},\ \forall\, u \in W^{1,p}(I).$$

3. Montrer que, pour tout $x_0 \in [-1, 1]$,

$$|||u||| := |u(x_0)| + \|u'\|_p, \forall\, u \in W^{1,p}(I),$$

   est une norme équivalente à la norme usuelle sur $W^{1,p}(I)$.

4. Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C^{0,1-1/p}([-1,1])$, au sens suivant : le représentant continu u ci-dessus est $(1-1/p)$-höldérien sur $[-1,1]$ et il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\sup_{\substack{x,\, y\, \in\, [-1,\, 1],\\ x\, \neq\, y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-1/p}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}.$$

5. Soit $1 < p < \infty$. Soit $(u_j)_{j\geq 0} \subset W^{1,p}(I)$ une suite bornée. Montrer qu'il existe une sous-suite $(u_{j_k})_{k\geq 0}$, $u \in C([-1,1])$ et $v \in L^p(I)$ telles que :
   (a) $u_{j_k} \to u$ uniformément sur $[-1,1]$.
   (b) $(u_{j_k})' \rightharpoonup v$ dans $L^p(I)$.
   (c) $u' = v$ dans $\mathscr{D}'(I)$.

   En déduire que $u \in W^{1,p}(I)$.

Exercice # 16. Pour quelles valeurs de $1 \leq p < \infty$ les fonctions suivantes appartiennent-elles à $W^{1,p}(]0,1[)$? $W^{1,p}(]1,+\infty[)$? a) $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, b) $x \mapsto |\ln x|^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice # 17. (Caractérisation de $W_0^{1,p}(I)$) Ici, $I =]-1,1[$ (mais les résultats s'adaptent à tout intervalle borné). Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u(-1) = u(1) = 0$.
2. $u \in W_0^{1,p}(I)$.
3. Le prolongement de u à $\mathbb{R}$, défini par $\widetilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R})$.
4. **(Inégalité de Poincaré)** Montrer que $u \mapsto \|u'\|_p$ est une norme sur $W_0^{1,p}(I)$, équivalente à la norme usuelle.
   Indication : utiliser l'exercice 15, question 3.
   En déduire l'*inégalité de Poincaré*

$$\|u\|_p \leq C\|u'\|_p,\ \forall\, u \in W_0^{1,p}(I),$$

   avec $C = C(p, I) < \infty$.

Exercice # 18. **(Intégration par parties)** Ici, $I =]-1,1[$ (mais les résultats s'adaptent à tout intervalle borné).

1. Montrer que $C^\infty(\overline{I})$ est dense dans $W^{1,p}(I)$.
   Indication : utiliser la densité de $C_c^\infty(I)$ dans $L^p(I)$.
2. Si $u, v \in W^{1,p}(I)$, montrer que $u\,v \in W^{1,p}(I)$ et $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.
   Indication : commencer par $u, v \in C^\infty(\overline{I})$.
3. Montrer que pour tout $u, v \in W^{1,p}(I)$,

$$\int_I u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_I u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Exercice # 19. Ici, $I =]0,1[$ (mais les résultats s'adaptent à tout intervalle borné). Si $1 \le p < \infty$, soit

$$W^{1,p}_{\text{pér}}(I) := \{u \in W^{1,p}(I) \, ; \, u(0) = u(1)\}$$

(voir l'exercice 15, question 2 (a)).

Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la base hilbertienne de $L^2(I) = L^1(I, \mathbb{C})$ donnée par

$$e_n(x) := e^{2\pi\imath nx}, \forall\, n \in \mathbb{Z}, \, \forall\, x \in [0,1].$$

Si $u \in L^1(I)$, soit

$$c_n(u) := \int_0^1 u_n(x)\, e^{2\pi\imath nx}\, dx, \, \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

de sorte que

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\, e_n \text{ dans } L^2(I), \, \forall\, u \in L^2(I). \tag{3}$$

1. Rappeler le sens de (3).
2. Si $u \in L^1(I)$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.
3. Si $u \in C_c^\infty(I)$, montrer que :
   (a) $|u_n| \le C/n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Indication : intégration par parties.
   (b) $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e_n$ dans $C([0,1])$. Indication : utiliser le théorème de Dirichlet et la question précédente.
4. Si $u \in W^{1,p}_{\text{pér}}(I)$, montrer que

   $$(u')_n = 2\pi\imath n\, u_n, \, \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

   On commencera par donner un sens à cette égalité.
5. Réciproquement, soit $v \in L^p(I)$ telle $v_0 = 0$. Soit $u_n := \dfrac{1}{2\pi\imath n} v_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\, e_n$ converge dans $L^2(I)$, et que sa somme u vérifie $u' = v$ dans $\mathscr{D}'(I)$.
   De plus, montrer que $u \in L^p(I)$, et donc $u \in W^{1,p}(I)$.
6. Montrer que

   $$H^1_{\text{pér}}(I) = \left\{ u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\, e_n \in L^2(I) \, ; \, \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\, |u_n|^2 < \infty \right\}$$

   et que

   $$\|u\|^2_{H^1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + 4\pi^2\, n^2)\, |u_n|^2, \, \forall\, u \in H^1(I).$$

7. Si $f \in L^2(I)$, montrer que l'équation

$$-u'' + u = f \text{ dans } \mathscr{D}'(I) \tag{4}$$

a exactement une solution $u \in H^1_{\text{pér}}(I)$.
Indication : pour deviner la solution, développer u et f dans la base $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et procéder à un calcul formel. Puis vérifier que l'on obtient ainsi une solution de (4).
Pour l'unicité, montrer d'abord que les solutions de l'équation homogène sont toutes de la forme $I \ni x \mapsto Ce^x + De^{-x}$, avec $C, D \in \mathbb{C}$.

Exercice # 20. ($W^{1,\infty}(I) = \text{Lip}(I, \mathbb{R})$) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On définit $W^{1,\infty}(I) := \{u \in L^\infty(I)\,;\, u' \in L^\infty(I)\}$, muni de $\|u\|_{W^{1,\infty}} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$.

Nous allons montrer que, si I est borné, alors $W^{1,\infty}(I) = \text{Lip}(I, \mathbb{R})$, avec équivalence des normes. (Voir les exercices 19 et 20, feuille 1, pour les espaces et notations utilisées dans cet exercice.)

1. Montrer que le représentant continu de $u \in W^{1,\infty}(I)$ (voir l'exercice 15, question 2 (a)) vérifie

$$|u(x) - u(y)| \le \|u'\|_\infty\, |x - y| \le \|u\|_{W^{1,\infty}}\, |x - y|,\ \forall\, x, y \in \overline{I},$$

et donc $u \in \text{Lip}(I, \mathbb{R})$. Il s'ensuit que $W^{1,\infty}(I, \mathbb{R}) \subset \text{Lip}(I, \mathbb{R})$.

2. Dans cette partie, nous montrons la inclusion $\text{Lip}(I, \mathbb{R}) \subset W^{1,\infty}(I, \mathbb{R})$ sous l'hypothèse I borné. Soit $u \in \text{Lip}(I, \mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $u \in L^\infty(I)$. (C'est à ce stade que nous utilisons l'hypothèse I borné.)
   (b) Soit $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Montrer que

$$\begin{aligned} -\int_I u(x)\, \varphi'(x)\, dx &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_I u(x)\, \frac{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)}{\varepsilon}\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_I \frac{u(x-\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}\, \varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

   (On donnera, pour ε suffisamment petit, un sens aux intégrales.)
   (c) En déduire que

$$\left| -\int_I u(x)\, \varphi'(x)\, dx \right| \le \|u\|\, \|\varphi\|_1,\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I).$$

   (d) En déduire que la forme linéaire

$$\psi : C_c^\infty(I) \to \mathbb{R},\ \psi(\varphi) := -\int_I u(x)\, \varphi'(x)\, dx,\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I),$$

   se prolonge par densité à une forme linéaire et continue, encore notée ψ, sur $L^1(I)$.

(e) En déduire qu'il existe $v \in L^\infty(I)$ tel que

$$\psi(\varphi) = \int_I v(x)\, \varphi(x)\, dx, \forall\, \varphi \in L^1(I),$$

et en particulier

$$-\int_I u(x)\, \varphi'(x)\, dx = \int_I v(x)\, \varphi(x)\, dx, \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I).$$

(f) Conclure.

3. Si I est borné, montrer l'équivalence des normes $\| \, \|_{W^{1,\infty}}$ et $||| \, |||$ sur $W^{1,\infty}(I) = \mathrm{Lip}(I, \mathbb{R})$.

Exercice # 21. (Transformée de Fourier de vp $(1/x)$) On rappelle que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi = \frac{\pi}{2}$.

Pour cet exercice, nous admettons les résultats suivants :

i) La distribution vp $(1/x)$, définie dans l'exercice 3, appartient à $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

ii) Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (T * \varphi)(x) := T(\varphi(x - \cdot)) \in \mathbb{C}$$

définit une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, qui appartient à $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et satisfait $\widehat{T * \varphi} = \widehat{\varphi}\, \widehat{T}$.

1. Montrer que

$$\text{vp}\,(1/x)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \le |x| \le 1/\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx,\ \forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

2. En déduire que $\widehat{\text{vp}\,(1/x)} = -\imath\, \pi\, \text{sgn}$. On donnera un sens à cette égalité.

3. **(Transformée de Hilbert)** On définit la *transformée de Hilbert* sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$\mathscr{H} f = \mathscr{F}^{-1}\left(-\imath\, \text{sgn} \widehat{f}\right),\ \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Donner un sens au résultat suivant, et le montrer :

$$\mathscr{H} f = \frac{1}{\pi}\, \text{vp}\,(1/x) * f,\ \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}).$$

4. Bonus : montrer que vp $(1/x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.