Feuille de TD # 8
RÉSOLUTION DE QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

NB. Le cadre est le suivant :

i) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$), muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_n. Les espaces L^p et $\mathscr{L}^p$ sont considérés par rapport à ce cadre.

ii) $\cdot$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$.

iii) Dans cette feuille, $|\ |$ est la norme euclidienne usuelle, $\|\ \|_2$, dans $\mathbb{R}^n$.

iv) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (α est un *multi-indice*) et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $x^\alpha := (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n}$.

v) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$.

vi) Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\partial^\beta f(x) := \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}(x).$$

vii) Pour $1 \leq j \leq n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\partial_j f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Exercice # 1. (Résolution d'équation elliptique via Lax-Milgram) Soit $I =]0, 1[$. Soit $\alpha \in C(\overline{I}, [0, \infty[)$. Soit $f \in C([0, 1])$. On étudie le problème

$$\begin{cases} -u'' + au = f & \text{dans } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

1. Si u est solution du problème, montrer que $u \in H_0^1(I)$ et que

$$\int_0^1 u'(x)\, \varphi'(x)\, dx + \int_0^1 a(x)\, u(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, \varphi(x)\, dx,\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I). \tag{2}$$

2. Montrer que (2) reste vraie si $\varphi \in H_0^1(I)$.
3. En déduire qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ vérifiant (2).
4. Montrer que $u \in C^2(\overline{I})$.
5. Montrer que u vérifie (1). Conclure.
6. Montrer que (1) avec $a = -\pi^2$ et $f = 1$ n'a pas de solution. Indication : supposer le contraire et multiplier (1) par $x \mapsto \sin(\pi x)$.

7. Montrer que

$$\int_0^1 u'(x)^2\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 u(x)^2\,dx,\ \forall\, u \in H_0^1(I). \tag{3}$$

Indication : on pourra commencer par $u \in C_c^\infty(I)$. Écrire $u(x) = v(x)\sin(\pi x)$, avec $v \in C_c^\infty(I)$, et établir (3) par une intégration par parties.

8. En déduire que (1) a une (et une seule solution) si $a \in C([0,1],]-\pi^2, \infty[)$.

Exercice # 2. (Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$) On s'intéresse à la résolution de l'*équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0, & \forall\,(t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{4}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est donnée.

1. **(Raisonnement formel)** On commence par un raisonnement formel pour deviner la forme de la solution. Le résultat ainsi obtenu sera justifié par la suite.

   Si $u : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, on définit, sous réserve d'existence, la *transformée de Fourier partielle* de u par rapport à la variable d'espace x :

$$\widehat{u}(t,\xi) = (\mathscr{F}_x u)(t,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} u(t,x)\,dx,\ \forall\, t \in I,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

   (a) Écrire l'équation différentielle que devrait satisfaire $[0,\infty[\ni t \mapsto \widehat{u}(t,\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

   (b) En déduire $\widehat{u}(t,\xi)$.

   (c) En déduire la forme de la solution u de (4).

2. **(Propriétés du noyau de la chaleur)** Soit

$$K(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)},\ \forall\, t > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,;$$

   c'est le *noyau de la chaleur*.

   Montrer que :

   (a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x)\,dx = 1$ pour tout $t > 0$.

   (b) $K \in C^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R}^n)$ et $\partial_t K(t,x) - \Delta_x K(t,x) = 0$.

   (c) Si L est un compact de $]0,\infty[\times\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ un multi-indice, il existe deux constantes $C = C(L,\alpha) < \infty$ et $\delta = \delta(L,\alpha) > 0$ telles que

$$|\partial^\alpha_{(t,x)} K(t,x-y)| \leq C e^{-\delta|y|^2},\ \forall\,(t,x) \in L,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

3. **(Solution de l'équation der la chaleur)** Soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. On définit, suivant la réponse devinée dans la partie 1 de l'exercice,

$$u(t,x) := \begin{cases} (K(t,\cdot) *_x f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(t, x-y) f(y)\, dy, & \text{si } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \\ f(x), & \text{si } t = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}. \quad (5)$$

Montrer que :
   (a) u est de classe C^∞ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^n$ et $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^n$.
   (b) Si $p < \infty$, alors $\lim\limits_{t\to 0} u(t,\cdot) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
   (c) Si f est uniformément continue et bornée, alors $\lim\limits_{t\to 0} u(t,\cdot) = f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   (d) Si f est continue et bornée, alors $\lim\limits_{t\to 0} u(t,\cdot) = f$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^n$.
4. **(Solution fondamentale de l'équation de la chaleur)** Soit

$$E(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)} \chi_{\{t>0\}},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que E est solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta_x$ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, c'est-à-dire,

$$\partial_t E - \Delta_x E = \delta_{(0,0)} \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x).$$

Exercice # 3. (Équation des ondes 1D) On s'intéresse à la résolution de l'*équation des ondes* 1D

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0, & \forall\, (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), & \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(0,x) = g(x), & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (6)$$

où $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont données.

La démarche est la même que dans l'exercice précédent.

1. **(Raisonnement formel)**
   (a) Écrire l'équation différentielle que devrait satisfaire $\mathbb{R} \ni t \mapsto \widehat{u}(t,\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire $\widehat{u}(t,\xi)$.
   (c) Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto \cos(t\xi)$. Montrer que $\varphi_t \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ et que (au sens des distributions tempérées) $\mathscr{F}^{-1}(\varphi_t) = \dfrac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t})$.
   (d) En déduire la forme de la solution u de (6).
2. **(Solution de l'équation des ondes en 1D)** Soient $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. On définit, suivant la réponse devinée dans la partie 1 de l'exercice, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$u(t,x) := \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy, \forall\, (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Montrer que u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et que u vérifie (6).

3. **(Solution fondamentale de l'équation des ondes en 1D)** Montrer que la fonction

$$E(t,x) := \frac{1}{2}H(t-|x|) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } t > |x| \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est solution fondamentale de l'opérateur des ondes $\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx}$ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$, c'est-à-dire,

$$\partial^2_{tt}E - \partial^2_{xx}E = \delta_{(0,0)} \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x).$$

Exercice # 4. Cet exercice prépare à l'exercice suivant.

Établir les identités suivantes, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert :

$$\partial_j |x| = \frac{x_j}{|x|},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$
$$\Delta(g(|x|)) = g''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} g'(|x|),\ \forall\, g \in C^2(]0,\infty[),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$
$$\Delta(uv) = (\Delta u)v + 2\nabla u \cdot \nabla v + u(\Delta v),\ \forall\, u, v \in C^2(\Omega),$$
$$\int_\Omega u(x)\,\Delta v(x)\,dx = \int_\Omega (\Delta u(x))\,v(x)\,dx,\ \forall\, u \in C^2(\Omega),\ \forall\, v \in C^\infty_c(\Omega).$$

Exercice # 5. **(Équation de Laplace dans le demi-espace)** On s'intéresse à l'*équation de Laplace* dans le demi-espace

$$\begin{cases} \Delta u = \partial^2_{tt} u + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{7}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est donnée.

La démarche est celle des exercices précédents.

1. **(Raisonnement formel)**
   (a) Écrire l'équation différentielle que devrait satisfaire $[0,\infty[\ni t \mapsto \widehat{u}(t,\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.
   (b) En déduire $\widehat{u}(t,\xi)$. On pourra s'inspirer du lemme de Riemann-Lebesgue et imposer le comportement de $\widehat{u}(t,\xi)$ pour $|\xi| \to \infty$.
   (c) En déduire la forme de la solution u de (7). Indication : utiliser l'exercice 19, question 4, feuille 5, et la formule d'inversion de Fourier.
2. **(Solution de l'équation de Laplace dans le demi-espace)** Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. On définit, selon ce qui a été deviné dans la première partie de l'exercice,

$$P(t,x) := \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \forall\, t > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$
$$u(t,x) := \begin{cases} (P(t,\cdot) *_x f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P(t,x-y)\,f(y)\,dy, & \text{si } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \\ f(x), & \text{si } t = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

(P est le *noyau de Poisson*.)

Montrer que :

(a) u est de classe C^∞ sur $]0, \infty[\times\mathbb{R}^n$ et $\Delta u = 0$ sur $]0, \infty[\times\mathbb{R}^n$.

(b) Si $p < \infty$, alors $\lim_{t\to 0} u(t, \cdot) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(c) Si f est uniformément continue et bornée, alors $\lim_{t\to 0} u(t, \cdot) = f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(d) Si f est continue et bornée, alors $\lim_{t\to 0} u(t, \cdot) = f$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^n$.

3. **(Solution fondamentale de l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$)** Soit, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$E(x) := \begin{cases} (1/2\pi) \ln|x|, & \text{si } n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\, C_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases},$$

où C_n est la constante de l'exercice 9, question 2, feuille 6.

Montrer que E est une solution élémentaire de Δ dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, $\Delta E = \delta_0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Pour montrer ce résultat, on pourra par exemple suivre les étapes suivantes :

(a) Montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty([0, \infty[, [0, 1])$ telle que $f(t) = 0$ si $t \leq 1$ et $f(t) = 1$ si $t \geq 2$.

(b) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $f^\varepsilon(x) := f(|x|/\varepsilon)$ et $E^\varepsilon(x) := f^\varepsilon(x)\, E(x)$, $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que, si $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}\Delta E^\varepsilon(x) =& \frac{2}{\varepsilon\, C_n\, |x|^{n-1}} f'(|x|/\varepsilon) \\ &- \frac{1}{\varepsilon\,(n-2)\, C_n\, |x|^{n-2}} \left[f''(|x|/\varepsilon) + \frac{n-1}{|x|} f'(|x|/\varepsilon) \right],\end{aligned} \tag{8}$$

et qu'une formule similaire est valide si $n = 2$.

(c) Passer à la limite $\varepsilon \to 0$ dans ce qui précède, de la manière suivante : montrer que $E^\varepsilon - E \to 0$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, et en déduire que $E^\varepsilon \to E$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\Delta E^\varepsilon \to \delta_0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(d) Conclure.

Exercice # 6. (Équation de Schrödinger) On s'intéresse à la résolution de l'*équation de Schrödinger*

$$\begin{cases} \imath\, \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0, & \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = g(x), & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{9}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est donnée.

1. **(Raisonnement formel)**

(a) Écrire l'équation différentielle que devrait satisfaire $\mathbb{R} \ni t \mapsto \widehat{u}(t, \xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) En déduire $\widehat{u}(t, \xi)$.

(c) En déduire la forme de la solution u de (9). Indication : utiliser l'exercice 8, question 2, feuille 6, et la formule d'inversion de Fourier.

2. **(Groupe de Schrödinger)** On définit, selon ce qui a été deviné dans la première partie de l'exercice,

$$\Phi_t(x) := \frac{1}{(\sqrt{4\pi\imath t})^n} e^{\dfrac{\imath|x|^2}{4t}}, \ \forall\, t \neq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

avec $\sqrt{\ }$ la détermination principale de la racine carrée. (Φ_t est le *noyau de Schrödinger*.)

Pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on pose $S(t)g := \Phi_t * g$. Pour $t = 0$, on définit $S(0)g := g$. Ainsi, on a une application

$$\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}^n) \ni (t, g) \mapsto S(t)g \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(a) On pose, pour $t \neq 0$, $g^t(x) := \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi\imath t})^n} e^{\dfrac{\imath|x|^2}{4t}} g(x)$. Montrer que, pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $S(t)g(x) = e^{\dfrac{\imath|x|^2}{4t}} \widehat{g^t}\left(\dfrac{x}{2t}\right)$.

(b) Montrer que $\|S(t)g\|_2 = \|g\|_2$, $\forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, g \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$.

(c) En déduire que $S(t)$ s'étend de manière unique comme isométrie linéaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $t \neq 0$, On pose

$$\Phi_{\varepsilon,t}(x) := \frac{1}{(\sqrt{4\pi(\varepsilon + \imath t)})^n} e^{-\dfrac{|x|^2}{4(\imath t + \varepsilon)}}, \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, t \neq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

(d) Pour $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, calculer $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}$. Montrer que $\Phi_{\varepsilon,t} * g \to S(t)g$ simplement quand $\varepsilon \to 0+$.

(e) En déduire l'égalité (au sens de $L^2(\mathbb{R}^n)$) suivante : $\widehat{S(t)g}(\xi) = e^{-\imath t|\xi|^2}\hat{g}(\xi)$, $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(f) Montrer que $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, au sens où $S(t+s)g = S(t)S(s)g$, $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(g) En déduire que $S(t)$ est unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathbb{R} \ni t \mapsto S(t)$ est un isomorphisme de groupes.

Cette propriété fait de $S(t)$ un groupe : c'est le *groupe de Schrödinger*.

(h) Montrer que, pour $t \neq 0$, $S(t)$ est continu de $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de norme $\leq (4\pi|t|)^{-n/2}$.

3. **(Solution de l'équation de Schrödinger)** On se donne $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on pose $u(t,\cdot) = S(t)g$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

(b) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. On pose $\psi(t,\xi) := \widehat{\varphi}(t,\xi)$. Montrer que u est solution au sens de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)$ de (9) si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi)e^{-\imath t|\xi|^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(-\xi,t) - \imath|\xi|^2\psi(-\xi,t)\right)d\xi dt = 0,\ \forall\,\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n).$$

(c) En déduire que, si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors u est solution de (9) au sens suivant :

i. u est solution au sens de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)$ de l'équation de Schrödinger.

ii. $\lim\limits_{t\to 0} u(t,\cdot) = g$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_x)$.

(d) Montrer que $u \in C(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}^n_x))$.

Exercice # 7. (Séparation des variables) On s'intéresse à la résolution des équations de ondes 1D périodique

$$\begin{cases}\partial^2_{tt}u(t,x) - \partial^2_{xx}u(t,x) = 0, & \forall\,t\in\mathbb{R},\ \forall\,x\in[0,1]\\ u(t,0) = u(t,1), & \forall\,t\in\mathbb{R}\\ u(0,x) = f(x), & \forall\,x\in[0,1]\\ \partial_t u(0,x) = g(x), & \forall\,x\in[0,1]\end{cases}, \tag{10}$$

avec $f, g : [0,1]\to\mathbb{C}$ données satisfaisant les conditions de compatibilité (avec (10)) $f(0) = f(1)$ et $g(0) = g(1)$. Pour simplifier au maximum les calculs, nous supposons, dans ce qui suit, que $g = 0$, mais la démarche proposée s'applique à une donnée g générale.

Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ comme dans l'exercice 19, feuille 7.

1. **(Raisonnement formel)** On suppose $f \in L^2(]0,1[)$. On cherche la solution de (10) sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)\,e_n(x),\ \forall\,t\in\mathbb{R},\ \forall\,x\in[0,1].$$

Déterminer formellement u en fonction des coefficients f_n de la décomposition $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n\,e_n$.

2. **(Solution de l'équation des ondes 1D périodique)** Soit $f \in H^1_{\text{pér}}(]0,1[)$. On définit, selon ce qui a été deviné dans la première partie de l'exercice,

$$u(t,\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \cos(2\pi\,nt)\,f_n\,e_n,\ \forall\,t\in\mathbb{R}.$$

Montrer que u est solution de (10) au sens suivant :

(a) u est solution au sens de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}\times]0,1[)$ de l'équation des ondes 1D.

(b) $\lim\limits_{t\to 0} u(t,\cdot) = f$ dans $H^1(]0,1[)$.

(c) $u \in C^1(\mathbb{R}, L^2(]0,1[)$, et $\lim\limits_{t\to 0}\partial_t u(t,\cdot) = 0$ dans $L^2(]0,1[)$.

(d) $u(t,0) = u(t,1), \forall\,t\in\mathbb{R}$.