Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2020–2021**
L3 | UE : Approfondissement en analyse

CC1 du 1 mars 2021

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Exercice 1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel, $u : F \to E$ une application linéaire injective et t un nombre réel. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur t pour que la fonction

$$x \mapsto t\|u(x)\|$$

définisse une norme sur F.

Exercice 2 Soit $a > 0$ un réel.

1. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$\|(x, y)\| = |x| + |x + 2ay|.$$

   Montrer que l'application $\|\cdot\|$ ainsi définie est une norme sur $\mathbf{R}^2$.

2. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer l'inégalité

$$\|(x, y)\| \leqslant 2(1 + a)\|(x, y)\|_1.$$

3. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer les inégalités

$$\|(x, y)\| \geq |x|,$$

$$\|(x, y)\| \geq 2a|y|.$$

4. En combinant les deux inégalités de la question précédente, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\|(x, y)\| \geq \frac{2a}{2a + 1}\|(x, y)\|_1.$$

Exercice 3 Soit $a > 0$ un réel. On définit un ensemble $A \subset \mathbf{R}$ par la formule

$$A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [n, n + a[.$$

Pour quelles valeurs de a l'ensemble A est-il fermé ?

Indication : faire des dessins.