Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3^e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle | Année 2024–2025

Contrôle continu # 1
– Éléments de correction –

Exercice # 1. (3 p.) Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\mathscr{L}^p$ est un espace vectoriel. La démonstration ne doit pas utiliser l'inégalité de Minkowski (dont la preuve repose sur le résultat demandé).

Solution. Soient $f, g \in \mathscr{L}^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par homogénéité de l'intégrale, nous avons $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, et donc $\lambda f \in \mathscr{L}^p$. Il reste à montrer que $f + g \in \mathscr{L}^p$. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(t) := |t|^p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Alors Φ est convexe, et satisfait par conséquence l'inégalité de Jensen $\Phi((s+t)/2)) \leq \dfrac{1}{2}(\Phi(s) + \Phi(t))$, $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$. Ceci implique $|(f+g)/2|^p \leq \dfrac{1}{2}(|f|^p + |g|^p)$, et donc $|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$. Il s'ensuit que

$$\int |f+g|^p \leq 2^{p-1} \left(\int |f|^p + \int |g|^p \right) < \infty,$$

d'où $f + g \in \mathscr{L}^p$. $\square$

Exercice # 2. (7 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes positives.

(a) Montrer que la fonction $f * g$ est borélienne.

(b) Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^1$, montrer que $f * g \in \mathscr{L}^p$.

Solution. (a) Les fonctions

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto f(x-y) \text{ et } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto g(y)$$

sont boréliennes, comme composées de fonctions boréliennes. Il s'ensuit que la fonction

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto k(x, y) := f(x-y) g(y)$$

est borélienne, et par ailleurs positive.

Comme $f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\, dy$, le théorème de Tonelli (appliqué à la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$) implique que $f * g$ est borélienne.

(b) Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité de Hölder avec exposants p et $p/(p-1)$ appliquée aux fonctions boréliennes

$$\mathbb{R}^n \ni y \mapsto f(x-y)[g(y)]^{1/p} \text{ et } \mathbb{R}^n \ni y \mapsto [g(y)]^{1-1/p}$$

donne

$$f * g(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y)]^p g(y)\, dy \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, dy \right)^{1-1/p},$$

d'où

$$[f * g(x)]^p \leq \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y)]^p g(y)\, dy. \tag{A}$$

Comme dans la partie (a), l'intégrale dans le membre de droite de (A) est une fonction borélienne de x. En intégrant (A) par rapport à x, en utilisant le théorème de Tonelli (pour la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$), et en faisant le changement de variables affine $x = y + z$, $z \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|f * g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} [f * g(x)]^p \, dx \leq \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y)]^p g(y) \, dy \right) dx \\ = \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y)]^p \, dx \right) g(y) \, dy = \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} [f(z)]^p \, dz \right) g(y) \, dy \\ = \|g\|_1^{p-1} \|f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \, dy = \|g\|_1^p \|f\|_p^p < \infty,\end{aligned}$$

d'où $f * g \in \mathscr{L}^p$. $\square$

Exercice # 3. (7 p.) Soit $f \in C_c^\infty(]0, \infty[; [0, \infty[)$. Soit $F(x) := \int_0^x f(t) \, dt$, $\forall \, x \geq 0$. Soit $1 < p < \infty$.

Rappelons l'inégalité de Hardy

$$\int_0^\infty \frac{[F(x)]^p}{x^p} \, dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty [f(x)]^p \, dx, \tag{1}$$

qui peut être montrée par une intégration par parties.

En s'inspirant éventuellement de la preuve de (1), montrer le résultat suivant (avec f, F et p comme ci-dessus). Soit $\alpha > 1$. Alors

$$\int_0^\infty \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha} \, dx \leq \left(\frac{p}{\alpha - 1} \right)^p \int_0^\infty \frac{[f(x)]^p}{x^{\alpha - p}} \, dx.$$

On pourra se servir de l'identité suivante : $\alpha - 1 = \alpha \dfrac{p-1}{p} + \dfrac{\alpha - p}{p}$.

Solution. Soient $0 < a < b < \infty$ tels que $f(x) = 0$ si $x \notin]a, b[$. Nous avons $F(x) = 0$ si $x \leq a$. Par ailleurs, nous avons $[F^p]' = pF^{p-1} f$.

Soit $M \geq b$. En utilisant : (i) une intégration par parties ; (ii) ce qui précède ; (iii) l'identité de l'énoncé ; (iv) l'inégalité de Hölder avec exposants p et $p/(p-1)$ (appliquée aux fonctions continues $x \mapsto f(x)/x^{(\alpha-p)/p}$ et $x \mapsto [F(x)]^{p-1}/x^{\alpha(p-1)/p}$), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha} \, dx = \int_a^M \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha} \, dx = -\frac{1}{\alpha - 1} \int_a^M [F(x)]^p \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right)' dx \\ = -\frac{1}{\alpha - 1} \left[\frac{[F(x)]^p}{x^{\alpha - 1}} \right]_{x=a}^{x=M} + \frac{p}{\alpha - 1} \int_a^M \frac{[F(x)]^{p-1} f(x)}{x^{\alpha - 1}} \, dx \\ = -\frac{1}{\alpha - 1} \frac{[F(M)]^p}{M^{\alpha - 1}} + \frac{p}{\alpha - 1} \int_a^M \frac{[F(x)]^{p-1} f(x)}{x^{\alpha - 1}} \, dx \\ \leq \frac{p}{\alpha - 1} \int_a^M \frac{[F(x)]^{p-1} f(x)}{x^{\alpha - 1}} \, dx = \frac{p}{\alpha - 1} \int_a^M \frac{[F(x)]^{p-1}}{x^{\alpha(p-1)/p}} \frac{f(x)}{x^{(\alpha-p)/p}} \, dx \\ \leq \frac{p}{\alpha - 1} \left(\int_a^M \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha} \, dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_a^M \frac{[f(x)]^p}{x^{\alpha - p}} \, dx \right)^{1/p} \\ \leq \frac{p}{\alpha - 1} \left(\int_0^M \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha} \, dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_0^\infty \frac{[f(x)]^p}{x^{\alpha - p}} \, dx \right)^{1/p},\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^M \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha} \, dx \leq \left(\frac{p}{\alpha - 1} \right)^p \int_0^\infty \frac{[f(x)]^p}{x^{\alpha - p}} \, dx. \tag{B}$$

En faisant $M \to \infty$ dans (B), nous obtenons l'inégalité demandée. $\square$

Exercice # 4. (4 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := e^{-|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f * g$ est continue. On pourra utiliser un théorème de cours ou un exercice de TD sur les produits de convolution, dont la conclusion est la continuité de $f * g$.

Solution. Soit q le conjugué de p. Si $g \in \mathscr{L}^q$, alors $f * g$ est continue. Il suffit donc de vérifier que, pour tout $1 \leq q \leq \infty$, nous avons $g \in \mathscr{L}^q$. Notons que g est borélienne.

Nous avons $|g| \leq 1$, d'où $\|g\|_\infty \leq 1 < \infty$, et donc $g \in \mathscr{L}^\infty$.

Si $1 \leq q < \infty$, nous avons

$$\|g\|_q^q = \int_{\mathbb{R}} e^{-q|x|}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-qx}\, dx = \frac{2}{q} < \infty,$$

et donc $g \in \mathscr{L}^q$. □

Exercice # 5. (4 p.) Nous travaillons dans un espace probabilisé $(X, \mathscr{T}, \mu)$. (Donc $\mu(X) = 1$.) Existe-t-il une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ telle que :

(a) $\|f\|_1 = 2$ et $\|f\|_2 = 1$?

(b) $\|f\|_1 = 1$ et $\|f\|_2 = 1$?

(c) (Question plus difficile) $\|f\|_1 = 1$, $\|f\|_2 = 2$ et $\|f\|_\infty = 3$?

On pourra utiliser librement les inégalités vues en TD concernant les normes $\| \, \|_p$ dans un espace probabilisé.

Solution. (a) Non, car dans un espace probabilisé nous avons $\|f\|_p \leq \|f\|_r$ si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, et en particulier $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$.

(b) Oui : $f \equiv 1$.

(c) Nous avons $|f| \leq \|f\|_\infty$ p. p. et donc

$$\|f\|_2^2 = \int |f|\,|f| \leq \|f\|_\infty \int |f| = \|f\|_\infty \|f\|_1.$$

Cette inégalité n'étant pas satisfaite par les valeurs de l'énoncé, la réponse est négative. □