Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^e année
Année 2022–2023

Contrôle continu # 1
Le 3 mars 2023 – durée 60 minutes

Exercice # 1. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Nous travaillons dans $(U, \mathscr{B}_U, \nu_n)$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_{L^\infty} = \sup\limits_U |f|$.

Exercice # 2. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$ et que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1, \forall\, x \in \ell^1$.

Exercice # 3. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Nous travaillons dans $(\mathscr{L}^p, \mathscr{T}, \mu)$. Si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ et $f_n \to g$ p. p., quelle est la relation entre f et g ?

Exercice # 4. Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = e^{-|x|},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $f * g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. On précisera le sens de l'hypothèse $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.
2. Montrer, de plus, que, si $p < r \leq \infty$, alors $f * g \in \mathscr{L}^r(\mathbb{R})$.