Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^e année
Année 2023–2024

Contrôle continu # 2
Le 29 mars 2024 – durée 60 minutes

Exercice # 1. Soit H un espace de Hilbert réel, séparable, de dimension infinie et de base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$. Montrer l'*égalité de Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\geq 1} \langle x, e_n\rangle^2, \; \forall\, x \in H.$$

Exercice # 2. Soit H un espace de Hilbert réel. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H.

b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$.

c) $(F^\perp)^\perp = \overline{\text{Vect}\,(F)}$.

Exercice # 3. Soit

$$\varphi : \ell^2 \to \mathbb{R}, \; \varphi((a_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}, \; \forall\, (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2.$$

Montrer que la série définissant $\varphi((a_n)_{n\geq 0})$ est convergente, et que φ est une application linéaire et continue sur ℓ^2.