Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Contrôle terminal
– le 17 mai 2021 –
– durée 90 minutes –

Le barème indiqué entre parenthèses est indicatif.

Exercice # 1 (2 p.). Soit $(x^j, y^j) \subset \mathbb{R}^2$ une suite telle que $(x^j, y^j) \to (0,0)$. Calculer

$$\lim_{j\to\infty} \cos\left(x^j\right).$$

Exercice # 2 (2 p.). Soit

$$\mathbb{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 < 1\}.$$

Montrer que $\mathbb{D}$ n'est pas compact.

Exercice # 3 (4 p.). Nous munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|\ \|_2$. Soit

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) := (x, 2y),\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer la norme triple de T. (Nous admettons sans preuve que T est linéaire.)

Exercice # 4 (4 p.). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) := f(\cos t, \sin t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que g est deux fois dérivable et calculer g''.

Exercice # 5 (2 p.). Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x - y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + y,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,?$$

Exercice # 6 (4 p.). Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x}{(x^2+y^2)^a}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ici, $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Trouver les valeurs de a telles que f soit continue.

Exercice # 7 (5 p.). Nous munissons $\mathscr{C}([-2,1];\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\ \|_\infty$. Soit

$$T : \mathscr{C}([-2,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ T(f) := \int_{-2}^{1} x\, f(x)\, dx,\ \forall\, f \in \mathscr{C}([-2,1];\mathbb{R}).$$

TSVP

Calculer la norme triple de T. (Nous admettons sans preuve que T est linéaire.)

Exercice # 8 (4 p.). Calculer le minimum sous contrainte

$$m := \min_{x\geq 0,\, y\geq 0,\, xy=1} e^{x+y}.$$

Nous admettons sans preuve que ce minimum est atteint. Indication : peut-on avoir $x = 0$ ou $y = 0$?

Exercice # 9 (3 p.). Montrer que le minimum m de la question précédente est bien atteint. Indication : examiner ce qui se passe si $x > 2$ ou $y > 2$ et montrer que

$$m := \min_{0\leq x\leq 2,\, 0\leq y\leq 2,\, xy=1} e^{x+y}.$$