Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3e année
Année 2022–2023

Corrigé du contrôle terminal
Le 26 mai 2023

Exercice # 1. Montrer que $\ell^2 \subset \ell^3$ et que $\|x\|_3 \le \|x\|_2, \forall\, x \in \ell^2$.

Solution. Soit $x = (a_n)_{n\ge 0} \in \ell^2$. Nous avons $a_n^2 \le \sum_{j\ge 0} a_j^2 = \|x\|_2^2$, d'où $|a_n| \le \|x\|_2, \forall\, n \ge 0$, et donc

$$\|x\|_3^3 = \sum_{n\ge 0} |a_n|^3 = \sum_{n\ge 0} |a_n| a_n^2 \le \sum_{n\ge 0} \|x\|_2 a_n^2 = \|x\|_2 \|x\|_2^2 = \|x\|_2^3 < \infty,$$

d'où les deux conclusions de l'exercice. □

Exercice # 2. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace probabilisé. (Donc $\mu(X) = 1$.) Montrer que, pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$, nous avons $\|f\|_1 \le \|f\|_2$.

Solution. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|f\|_1 = \int |f| = \int |f| \cdot 1 \le \left(\int f^2\right)^{1/2} \left(\int 1^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 [\mu(X)]^{1/2} = \|f\|_2. \qquad \square$$

Exercice # 3. Soit $H = L^2(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ (les fonctions sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}$). On considère l'ensemble $C = \{f \in H\,;\, f \ge 0 \text{ p. p.}\}$.

a) Montrer que C est un convexe fermé.

b) Montrer que, si $f \in H$, alors $P_C(f) = f\chi_{\{f\ge 0\}}$, où $\{f \ge 0\} = \{x \in X\,;\, f(x) \ge 0\}$.

Solution. Notons l'ambiguïté usuelle de la définition de C. Si $[\,]$ désigne une classe d'équivalence dans L^p, il faut plutôt lire $C = \{[f]\,;\, f \in \mathscr{L}^p,\ f \ge 0 \text{ p. p.}\}$. Par ailleurs, quitte à remplacer f par $f\chi_{\{f\ge 0\}}$, qui est dans la classe de f, nous pouvons travailler avec des fonctions ≥ 0.
a) Soient $\theta \in [0, 1]$ et $[f], [g] \in C$, avec $f, g \ge 0$. Nous avons $\theta f + (1-\theta)g \ge 0$ et $\theta f + (1-\theta)g \in \mathscr{L}^2$, et donc $[\theta f + (1-\theta)g] \in C$, d'où C est convexe. Par ailleurs, soit $([f_j]) \subset C$ une suite convergente dans L^2, de limite $[f]$. Soient $([f_{j_k}])$ une sous-suite et $A \in \mathscr{T}$ négligeable tels que $f_{j_k} \to f$ dans A^c. Par passage à la limite, $f \ge 0$ dans A^c, et donc $[f] \in C$. Il s'ensuit que C est fermé.
b) Soit $[f] \in L^2$. Soit $g = f\chi_{\{f\ge 0\}}$. Comme $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \ge 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$, g est : (i) mesurable ('fonction à accolade'); (ii) positive; (iii) dans $\mathscr{L}^2$ (car $\int g^2 \le \int f^2 < \infty$) et donc sa classe est dans C. Pour conclure, il faut montrer que

$$[h \in \mathscr{L}^2,\ h \ge 0 \text{ p. p.}] \implies \langle f - g, h - g\rangle \le 0.$$

Or,

$$\langle f - g, h - g\rangle = \int (f - g)\,(h - g) = \int_{\{f<0\}} f\, h \le 0. \qquad \square$$

Exercice # 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que $f(x) = \pi - x$ sur $]0, \pi]$. En utilisant la série de Fourier de f, calculer $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{\sin n}{n}$.

Solution. Nous avons $c_0(f) = 0$, car f est impaire. Si $n \neq 0$, nous avons, avec le c. v. $x = -y$,

$$\begin{aligned}
2\pi c_n(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\imath nx} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{0} e^{-\imath nx} f(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} e^{-\imath nx} f(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} e^{\imath ny} f(-y)\, dy \\
&+ \int_{0}^{\pi} e^{-\imath nx} f(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} (e^{-\imath nx} - e^{\imath nx}) f(x)\, dx = -2\imath \int_{0}^{\pi} f(x) \sin{(nx)}\, dx \\
&= \frac{2\imath}{n} \int_{0}^{\pi} f(x) [\cos{(nx)}]'\, dx = \frac{2\imath}{n} \Big[(\pi - x)\cos{(nx)}\Big]_{0}^{\pi} + \frac{2\imath}{n} \int_{0}^{\pi} \cos{(nx)}\, dx = -\frac{2\imath\pi}{n},
\end{aligned}$$

et donc $c_n(f) = -\imath/n$. Le théorème de Dirichlet donne

$$\pi - 1 = f(1) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{\imath n} = -\imath \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{e^{\imath n}}{n} + \frac{e^{-\imath n}}{-n} \right) = 2 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n},$$

d'où la somme de l'énoncé vaut $(\pi - 1)/2$. □

Exercice # 5. Nous travaillons dans $]0, \infty[$ et dans $]0, \infty[^2$, chacun muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soient $f, g :]0, \infty[\to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes et positives.

Nous admettons les identités suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+y)\sqrt{y}}\, dy = \int_0^\infty \frac{\sqrt{y}}{(x+y)\sqrt{x}}\, dx = \pi,\ \forall\, x > 0. \tag{1}$$

En utilisant : (i) l'identité

$$\frac{f(x)g(y)}{x+y} = \frac{f(x)\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+y}\,\sqrt[4]{y}} \times \frac{g(y)\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x+y}\,\sqrt[4]{x}},\ \forall\, x, y > 0\,;$$

(ii) l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $]0, \infty[^2$; (iii) le théorème de Tonelli ; (iv) l'identité (1), montrer l'*inégalité de Hilbert-Schur*

$$\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, dxdy \leq \pi \|f\|_2 \|g\|_2. \tag{2}$$

Bonus. Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. En utilisant les identités

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/q}}{(x+y)\, y^{1/q}}\, dy = \int_0^\infty \frac{y^{1/p}}{(x+y)\, x^{1/p}}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}, \forall\, x > 0,$$

$$\frac{f(x)g(y)}{x+y} = \frac{f(x)\, x^{1/(pq)}}{(x+y)^{1/p}\, y^{1/(pq)}} \times \frac{g(y)\, y^{1/(pq)}}{(x+y)^{1/q}\, x^{1/(pq)}},\ \forall\, x, y > 0,$$

l'inégalité de Hölder avec exposants p et q et le théorème de Tonelli, établir l'*inégalité de Hardy-Riesz*

$$\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, dxdy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q. \tag{3}$$

Solution. Prouvons directement (3), qui englobe (2) (prendre $p = q = 2$). Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, dxdy &= \int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)\, x^{1/(pq)}}{(x+y)^{1/p}\, y^{1/(pq)}} \times \frac{g(y)\, y^{1/(pq)}}{(x+y)^{1/q}\, x^{1/(pq)}}\, dxdy \\
&\leq \left(\int_{]0,\infty[^2} \frac{f^p(x)\, x^{1/q}}{(x+y)\, y^{1/q}}\, dxdy \right)^{1/p} \left(\int_{]0,\infty[^2} \frac{g^q(y)\, y^{1/p}}{(x+y)\, x^{1/p}}\, dxdy \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty f^p(x) \left(\int_0^\infty \frac{x^{1/q}}{(x+y)\, y^{1/q}}\, dy \right) dx \right)^{1/p} \\
&\times \left(\int_0^\infty g^q(y) \left(\int_0^\infty \frac{y^{1/p}}{(x+y)\, x^{1/p}}\, dx \right) dy \right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \right)^{1/p} \|f\|_p \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \right)^{1/q} \|g\|_q = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q.
\end{aligned}$$

□