Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2025–2026

Contrôle terminal
Éléments de correction

**Exercice # 1. (2 p.)** Nous travaillons dans $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués.

a) Rappeler l'inégalité de Hölder pour $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$.

b) Montrer que cette inégalité devient égalité pour $g := |f|^{p-1} \operatorname{sgn} f$.

*Solution.* a) Deux réponses acceptées : $\int |fg| \le \|f\|_p \|g\|_q$ ou $\left|\int fg\right| \le \|f\|_p \|g\|_q$. b) Avec $g$ comme dans l'énoncé, nous avons $fg = |fg| = |f|^p$, et donc, en utilisant les relations $pq = p + q$ et $1/p + 1/q = 1$,

$$\int |fg| = \left|\int fg\right| = \int |f|^p,$$
$$\|f\|_p \|g\|_q = \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |f|^{q(p-1)}\right)^{1/q} = \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |f|^p\right)^{1/q} = \int |f|^p. \qquad \square$$

**Exercice # 2. (3 p.)** Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soient $A, B$ deux boréliens bornés de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\chi_A * \chi_B \in \mathscr{L}^r$, $\forall\, 1 \le r \le \infty$.

*Solution.* Les fonctions $f := \chi_A$ et $g := \chi_B$ sont boréliennes. D'après l'inégalité de Young, il suffit de montrer que $f \in \mathscr{L}^1$ et $g \in \mathscr{L}^r$. Avec $\lambda_n$ la mesure de Lebesgue, nous avons d'une part $\|f\|_1 = \int \chi_A = \lambda_n(A) < \infty$ (car $A$ est borné et donc sa mesure de Lebesgue est finie). D'autre part, si $1 \le r < \infty$, alors

$$\|g\|_r = \left(\int |\chi_B|^r\right)^{1/r} = \left(\int \chi_B\right)^{1/r} = (\lambda_n(B))^{1/r} < \infty.$$

Enfin, $|g| \le 1$ et donc $\|g\|_\infty \le 1$, d'où $g \in \mathscr{L}^\infty$. $\square$

**Exercice # 3. (7 p.)** Soit $H$ un espace de Hilbert (réel). Soit $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $H$.

a) Expliquer pourquoi $F$ est « naturellement » un espace de Hilbert.

b) Si $x \in H$, rappeler : (i) la définition ; (ii) le résultat d'existence ; (iii) la caractérisation à l'aide du produit scalaire de $y := p_F(x)$.

c) On suppose $F$ de dimension infinie et séparable. Rappeler : (i) la définition ; (ii) le résultat d'existence d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\ge1}$ de $F$.

d) Sous les hypothèses et avec les notations des questions précédentes, montrer que $y = \sum_{n\ge1} \langle x, e_n\rangle e_n$.

Indications. Pour montrer que la série définissant $y$ converge, on pourra utiliser l'inégalité de Bessel pour $x$. Par la suite, on pourra commencer par calculer $\langle x - y, e_k\rangle$, avec $k \ge 1$.

*Solution.* a) $F$ hérite de $H$ un produit scalaire et la norme associée. Par ailleurs, $F$ étant fermé dans $H$ qui est complet, $F$ est complet.

b) (i) $y$ a les propriétés $y \in F$ et $\|x - y\| \le \|x - z\|$, $\forall\, z \in F$ ; (ii) son existence (et unicité) vient du fait que $F$ est convexe et non-vide (car s.e.v.), et fermé (par hypothèse) ; (iii) $y$ est caractérisé par $y \in F$ et $\langle x - y, w\rangle = 0$, $\forall\, w \in F$.

c) (i) Une base hilbertienne est une suite orthonormée $(e_n)_{n\ge1}$ de $F$ telle que, pour tout $w \in F$, $w = \sum_{n\ge1} \langle w, e_n\rangle e_n$. (ii) Tout espace de Hilbert de dimension infinie et séparable en admet une.

d) L'inégalité de Bessel donne (1) $\sum_{n\geq 1}\langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2 < \infty$. Comme $F$ est complet et $(e_n)_{n\geq 1}$ est une suite orthonormée de $F$, (1) implique que la série $\sum_{n\geq 1}\langle x, e_n\rangle e_n$ converge dans $F$. En particulier, $y \in F$.

Nous avons, si $N \geq k$, $\langle x - \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle = 0$. En faisant $N \to \infty$ dans ce qui précède, nous trouvons que $\langle x - y, e_k\rangle = 0, \forall\, k \geq 1$.

Soit $w \in F$. Nous avons $\langle x - y, \sum_{n=1}^{N}\langle w, e_n\rangle e_n\rangle = \sum_{n=1}^{N}\langle w, e_n\rangle\langle x - y, e_n\rangle = 0$, puis, en faisant $N \to \infty$ dans cette égalité, $\langle x - y, w\rangle = 0$. $\square$

**Exercice $\#$ 4. (6 p.)**

a) Dans le cadre des séries de Fourier, rappeler : (i) l'intervalle ; (ii) la mesure ; (iii) les normes $\| \, \|_p$, $1 \leq p < \infty$, considérés.

Dans ce qui suit, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues et $2\pi$-périodiques. On pose

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\, dy.$$

b) Montrer que $f * g$ est : (i) bien définie ; (ii) continue ; (iii) $2\pi$-périodique.

c) Montrer que $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g), \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer, en utilisant l'égalité de Parseval, que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f * g)| \leq \|f\|_2\|g\|_2,$$

et en déduire que la série de Fourier de $f * g$ est normalement convergente.

*Solution.* a) (i) $I = ]0, 2\pi[$ ; (ii) $\frac{1}{2\pi}\lambda$ (avec $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $I$) ; (iii) $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$.

b) (i), (ii) On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre. L'hypothèse clé est la majoration. Or, nous avons

$$|f(x-y)g(y)| \leq \sup_{\mathbb{R}}|f| \sup_{\mathbb{R}}|g| = C < \infty \text{ (car les fonctions continues et périodiques sont bornées),}$$

et dans notre cadre une constante est une majorante intégrable.

(iii) $f * g(x + 2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x + 2\pi - y)g(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy = f * g(x)$.

c) Les fonctions considérées ci-dessous étant bornées sur le compact $[0, 2\pi]^2$, nous pouvons appliquer le théorème de Fubini pour mener les calculs suivants (avec le changement de variables $z = x - y$)

$$\begin{aligned}
c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f * g(x)e^{-\imath nx}\, dx = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\, dy\right) e^{-\imath nx}\, dx \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)e^{-\imath nx}\, dx\right) dy \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x-y)e^{-\imath n(x-y)}\, dx\right) g(y)e^{-\imath ny}dy \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-y}^{2\pi-y} f(z)e^{-\imath n(z)}\, dz\right) g(y)e^{-\imath ny}dy \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(z)e^{-\imath n(z)}\, dz\right) g(y)e^{-\imath ny}dy = c_n(f)c_n(g).
\end{aligned}$$

d) Suivons l'indication. Nous avons

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f*g)| = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)||c_n(g)| \leq \left(\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N}^{N} |c_n(g)|^2\right)^{1/2},$$

d'où, en faisant $N \to \infty$ et en utilisant l'égalité de Parseval,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f*g)| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2\|g\|_2 < \infty$$

(car $f$ et $g$ sont bornées).

Enfin, comme $\|c_n(f*g)e_n\|_\infty = |c_n(f*g)|$, l'inégalité que nous venons de montrer implique la convergence normale de la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f*g)e_n$ de $f*g$. □

**Exercice # 5. (7 p.)** Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 \leq p < \infty$. Soient $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := e^{-|x|}$, $h(x) := -g(x)\operatorname{sgn}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. (Donc $h(x) = g'(x)$, $\forall\, x \neq 0$.) Nous admettons sans preuve que $g, h \in \mathscr{L}^r$, $\forall\, 1 \leq r \leq \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p$, posons $F := f * g$. Le but de cet exercice est de montrer que : (i) $F \in C^1$ ; (ii) $F' = f * h$.

a) Montrer (i) et (ii) si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

b) Conclure.

Pour le point b), on pourra utiliser sans preuve le « théorème de Weierstrass » suivant. Si : (j) $(F_j) \subset C^1(\mathbb{R})$ ; (jj) $F, G \in C(\mathbb{R})$ ; (jjj) $F_j \to F$ simplement ; (jjjj) $F_j' \to G$ uniformément, alors : ($\ell$) $F \in C^1$ ; ($\ell\ell$) $F' = G$.

*Solution.* a) Nous avons $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{L}^1$. D'après un résultat du cours, $F \in C^\infty$ (d'où (i)) et $F' = f' * g$, c'est-à-dire $F'(x) = \int f'(x-y)\, e^{-|y|}\, dy$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. À partir de cette égalité, nous obtenons (ii) comme suit. Soit $R > 0$ tel que $f(x-y) = 0$ si $|y| \geq R$. Nous obtenons, par IPP,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-R}^{R} f'(x-y)e^{-|y|}\, dy = \int_{-R}^{0} f'(x-y)\, e^{y}\, dy + \int_{0}^{R} f'(x-y)\, e^{-y}\, dy \\ &= \big[-f(x-y)\, e^{y}\big]_{y=-R}^{y=0} + \int_{-R}^{0} f(x-y)\, e^{y}\, dy + \big[-f(x-y)\, e^{-y}\big]_{y=0}^{y=R} \\ &\quad - \int_{0}^{R} f(x-y)\, e^{-y}\, dy = \int_{-R}^{R} f(x-y)h(y)\, dy = \int f(x-y)h(y)\, dy = f*h(x). \end{aligned}$$

b) Soit $(f_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$. Nous allons suivre l'indication et montrer que $f_j * g \to f * g$ simplement (en fait uniformément) et que $f_j * h \to f * h$ uniformément. L'inégalité de Young donne, avec $q$ le conjugué de $p$,

$$|(f_j * g - f * g)(x)| = |(f_j - f) * g(x)| \leq \|f_j - f\|_p \|g\|_q,$$

et de même pour $|(f_j * h - f * h)(x)|$. Les conclusion suit de ce qui précède et le fait que $g, h \in \mathscr{L}^q$. □