Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3^e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle | Année 2023–2024

Contrôle terminal
Le 2 mai 2024 – durée 90 minutes

Exercice # 1. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit

$$\varphi((a_n)_{n\geq 0}) := \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}. \tag{1}$$

a) Si $1 \leq p < \infty$ et $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, montrer que la série qui apparaît dans (1) est convergente.

b) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que φ est une application linéaire et continue sur ℓ^p.

c) Les résultats précédents restent-ils vrais si $p = \infty$?

Exercice # 2. Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^p(I)$. Soit

$$F(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \ \forall\, x > 0.$$

a) Montrer que F est bien définie.
Nous admettons par la suite que F est continue.

b) Soit $\alpha := \dfrac{p-1}{p^2}$. En utilisant l'inégalité de Hölder, trouver des constantes explicites $C < \infty$ et $a \in \mathbb{R}$ telles que

$$|F(x)| \leq C x^a \left(\int_0^x t^{\alpha p} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}, \ \forall\, x > 0. \tag{2}$$

c) En déduire l'*inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\, dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\, dx. \tag{3}$$

Exercice # 3. Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. Soit

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{1 + (x-y)^2}\, dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que F est bien définie (en tout point $x \in \mathbb{R}$) et bornée.

Exercice # 4. Soit H un espace de Hilbert réel, de norme $\| \; \|$ et de produit scalaire $\langle \, , \rangle$. Soit $a \in H$ tel que $\|a\| = 1$. Soit $C := \{x \in H \, ; \, \langle x, a \rangle \leq 0\}$.

a) Montrer que C est un ensemble convexe, fermé et non-vide.

b) Si $x \in H \setminus C$, montrer que $p_C(x) = x - \langle x, a \rangle a$.

Exercice # 5. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f(2\pi)$.

a) Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, calculer $c_n(f)$ en fonction de $c_n(f')$.

b) En utilisant l'égalité de Parseval pour f', en déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n(f)|^2 < \infty. \tag{4}$$

c) En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty. \tag{5}$$

d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ vers f. (Ici, $e_n(x) := e^{\imath n x}$, $\forall\, x \in [0, 2\pi], \forall\, n \in \mathbb{Z}$.)