Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2025–2026

Contrôle terminal
Le 7 mai 2026 – durée 90 minutes
Le barème, sur 25 points, est donné à titre indicatif

Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets connectés sont interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice # 1. (2 p.) Nous travaillons dans $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués.

a) Rappeler l'inégalité de Hölder pour $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$.

b) Montrer que cette inégalité devient égalité pour $g := |f|^{p-1} \operatorname{sgn} f$.

Exercice # 2. (3 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soient A, B deux boréliens bornés de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\chi_A * \chi_B \in \mathscr{L}^r$, $\forall\, 1 \le r \le \infty$.

Exercice # 3. (7 p.) Soit H un espace de Hilbert (réel). Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H.

a) Expliquer pourquoi F est « naturellement » un espace de Hilbert.

b) Si $x \in H$, rappeler : (i) la définition ; (ii) le résultat d'existence ; (iii) la caractérisation à l'aide du produit scalaire de $y := p_F(x)$.

c) On suppose F de dimension infinie et séparable. Rappeler : (i) la définition ; (ii) le résultat d'existence d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\ge 1}$ de F.

d) Sous les hypothèses et avec les notations des questions précédentes, montrer que $y = \sum_{n\ge 1} \langle x, e_n\rangle e_n$.

Indications. Pour montrer que la série définissant y converge, on pourra utiliser l'inégalité de Bessel pour x. Par la suite, on pourra commencer par calculer $\langle x - y, e_k\rangle$, avec $k \ge 1$.

Exercice # 4. (6 p.)

a) Dans le cadre des séries de Fourier, rappeler : (i) l'intervalle ; (ii) la mesure ; (iii) les normes $\| \ \|_p$, $1 \le p < \infty$, considérés.

Dans ce qui suit, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues et 2π-périodiques. On pose

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) g(y)\, dy.$$

b) Montrer que $f * g$ est : (i) bien définie ; (ii) continue ; (iii) 2π-périodique.

c) Montrer que $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer, en utilisant l'égalité de Parseval, que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f * g)| \le \|f\|_2 \|g\|_2,$$

et en déduire que la série de Fourier de $f * g$ est normalement convergente.

Exercice # 5. (7 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 \le p < \infty$. Soient $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := e^{-|x|}$, $h(x) := -g(x) \operatorname{sgn}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. (Donc $h(x) = g'(x)$, $\forall\, x \ne 0$.) Nous admettons sans preuve que $g, h \in \mathscr{L}^r$, $\forall\, 1 \le r \le \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p$, posons $F := f * g$. Le but de cet exercice est de montrer que : (i) $F \in C^1$; (ii) $F' = f * h$.

a) Montrer (i) et (ii) si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

b) Conclure.

Pour le point b), on pourra utiliser sans preuve le « théorème de Weierstrass » suivant. Si : (j) $(F_j) \subset C^1(\mathbb{R})$; (jj) $F, G \in C(\mathbb{R})$; (jjj) $F_j \to F$ simplement ; (jjjj) $F_j' \to G$ uniformément, alors : (ℓ) $F \in C^1$; $(\ell\ell)$ $F' = G$.