Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^e année
Année 2022–2023

Contrôle terminal
2^e session - le 29 juin 2023 – durée 60 minutes

Exercice # 1. Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho(x) := e^{-|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour $1 \leq p \leq \infty$, nous avons

$$f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \implies [f * \rho \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \text{ et } \|f * \rho\|_p \leq 2\|f\|_p].$$

Exercice # 2. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace probabilisé. (Donc $\mu(X) = 1$.) Montrer que, pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$, nous avons $\|f\|_2 \leq \|f\|_3$.

Exercice # 3. Soit $(H, \| \, \|$ un espace de Hilbert réel. Soit C la boule unité fermée de H. Nous admettons que C est convexe et fermée. Si $x \notin C$, montrer que $p_C(x) = \dfrac{1}{\|x\|} x$.

Exercice # 4. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement.