Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3^e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle | Année 2023–2024

Contrôle terminal
2e session - le 21 juin 2024 – durée 90 minutes

Exercice # 1. Nous travaillons dans $I =]0,\infty[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1-\cos x}{x^a},\ \forall\, x \in]0,\infty[.$$

Soit $1 \le p < \infty$. Montrer que

$$f \in \mathscr{L}^p(]0,\infty[) \iff \frac{1}{p} < a < 2 + \frac{1}{p}.$$

On pourra utiliser les propriétés suivantes :

$$0 \le 1 - \cos x \le \frac{x^2}{2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Exercice # 2. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace probabilisé. (Donc $\mu(X) = 1$.) Montrer que, pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$, nous avons $\|f\|_3 \le \|f\|_5$.

Exercice # 3. Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Soit

$$g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \sin(y^2)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que g est bien définie en tout point $x \in \mathbb{R}$, continue et bornée.

Exercice # 4. Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soit

$$C := \{f \in L^2(X)\,;\ f \ge 0\}.$$

1. Expliquer le sens de « $f \ge 0$ ».
2. Montrer que C est convexe, fermé et non-vide.
3. Si $f \in L^2(X)$, montrer que $p_C(f) = f_+$. On expliquera le sens de cette égalité.

Exercice # 5. Soient $N \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $-N \le j \le N$, et

$$f(x) := \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{\imath j x},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n(f)$.