Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^e année
Année 2024–2025

Contrôle terminal
Le 2 juillet 2025 – durée 90 minutes
Le barème est donné à titre indicatif

Questions de cours. (2 p.)

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique. Indiquer une condition sur f, aussi faible que possible, permettant de définir $c_n(f)$ et $S_n(f)(x)$, quantités dont on rappellera la définition.

b) Énoncer le critère de Dini pour une fonction f et un point $x \in \mathbb{R}$, en précisant toutes les hypothèses faites sur f.

Exercice # 1. (2 p.) Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite orthonormée dans un espace de Hilbert. Soit $\alpha > 0$ un paramètre. Déterminer toutes les valeurs de α telles que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} e_n$ converge.

Exercice # 2. (4 p.) Nous travaillons dans $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Soit

$$C := \{(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2 \,;\, 0 \leq a_n \leq 1,\ \forall\, n \geq 0\}.$$

a) Montrer que C est convexe, fermé, non-vide.

b) Si $x = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, montrer que $p_C(x) = y$, où $y := (\min(a_n, 1))_{n\geq 0}$.

Exercice # 3. (2 p.) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $f, g \in \mathscr{L}^2(X)$.

Nous rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int fg \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \tag{1}$$

qu'il n'est pas demandé de montrer.

En utilisant (1), montrer l'inégalité de Minkowski pour $p = 2$, à savoir

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2. \tag{2}$$

On pourra commencer par « mettre (2) au carré ».

Exercice # 4. (4 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Sans calculer explicitement $f * f$, montrer que $f * f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.

b) Calculer explicitement $f * f(x)$, $\forall\, x \geq 0$.

Exercice # 5. (5 p.) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et paire définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha, & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Déterminer toutes les valeurs de α telles que le critère de Dini soit satisfait en $x = 0$. On fera particulièrement attention au cas où $\alpha = 0$.

Exercice # 6. (4 p.) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction avec les deux propriétés suivantes : (i) f est 2π-périodique ; (ii) sur $]0, 2\pi]$, $f \in C^1$. Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\cdot}$ converge uniformément.