Problème n° 2 : convexité

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Dans ce sujet, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.
On rappelle que f est dite <u>convexe</u> sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \quad \textit{Inégalité de convexité} \ (\star).$$

On dit que f est <u>concave</u> sur I si $-f$ est convexe sur I.

I. Préliminaires

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est croissante sur I.

2. Traduire à l'aide de quantificateurs que f n'est pas croissante sur I.

3. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est une fonction affine sur I.

4. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est continue en un point a de I.

II. Quelques propriétés et exemples

5. Écrire une inégalité, analogue à $(\star)$, caractérisant une fonction concave sur I.

6. Caractérisation graphique de la convexité.

- **a.** Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Démontrer que $z \in [x; y]$ si et seulement si il existe $\lambda \in [0; 1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.
- **b.** Sans démonstration, illustrer l'inégalité de convexité $(\star)$ par une figure.

7. Opérations et convexité.

- **a.** Soient f et g des fonctions convexes sur I. Démontrer que $f + g$ est convexe sur I.
- **b.** Soient f une fonction convexe sur I à valeurs dans J et g une fonction convexe et croissante sur J. Démontrer que $g \circ f$ est convexe sur I.
- **c.** Sans démonstration, énoncer une propriété du même type qui permettrait de conclure que $g \circ f$ est concave.

8. **Quelques exemples.**
L'étude des exemples qui suivent prendra appui sur la définition de la convexité et sur les résultats précédemment démontrés.
   a. Démontrer que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.
   b. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   c. On cherche à démontrer que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x < y$. On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par
$$\forall t \in [0;1],\ g(t) = \ln\big(tx + (1-t)y\big) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y).$$
      i. Étudier la monotonie de la fonction g', dérivée de g, sur $[0; 1]$.
      ii. Démontrer que :
$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln\big(x\big) - \ln\big(y\big)}{x-y} \leqslant \frac{1}{x}.$$
      iii. En déduire le signe de $g'(0)$ et de $g'(1)$.
      iv. Déduire des questions précédentes que g' s'annule une unique fois sur $[0; 1]$.
      v. Déterminer le signe de g sur $[0; 1]$ et conclure.
9. **Généralisation de l'inégalité de convexité.**
Soit f une fonction convexe sur I.
Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$$
et
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$
10. **Deux applications.**
   a. À l'aide de la concavité de ln, démontrer que pour tout $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a
$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$
   b. Démontrer que $\ln \circ \ln$ est concave sur $]1, +\infty[$.
   En déduire que pour tout $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$, on a
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

III. Inégalités des trois pentes et conséquences

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.

Pour tout $a \in I$, on considère la fonction Δ_a : $\begin{cases} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{cases}$

11. **a.** On suppose dans cette question que la fonction f est convexe sur I.
Soient $a \in I$ et $(t,u) \in (I \setminus \{a\})^2$ tel que $t < u$.

i. On suppose que $t < u < a$. D'après la question **6.a.**, on sait qu'il existe $\lambda \in]0;1[$ tel que $u = \lambda t + (1-\lambda)a$.
Démontrer que $f(u) - f(a) \leqslant \lambda(f(t) - f(a))$ puis que $\Delta_a(t) \leqslant \Delta_a(u)$.

ii. On admet que cette dernière inégalité reste vraie pour $a < t < u$ et pour $t < a < u$. Que peut-on en déduire pour Δ_a ?

b. On suppose dans cette question que, pour tout $a \in I$, Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
Soient $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in [0;1[$.

i. Démontrer que $\Delta_x(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \Delta_x(y)$.

ii. En déduire que f est convexe sur I.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur Δ_a pour que f soit convexe sur I.

On suppose dans la suite de cette partie III que la fonction f est convexe sur I.

12. Soit $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.

a. En utilisant la question **11**, démontrer l'inégalité des trois pentes :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

b. Illustrer cette inégalité par une figure.

13. **a. Théorème de la limite monotone.**
Soit φ une fonction croissante sur l'intervalle $]a;b[$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

i. Démontrer que si φ est majorée alors elle admet une limite finie à gauche en b, égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{\varphi(x)\ ;\ x \in]a,b[\}$.

ii. Sans démonstration, que peut-on dire si φ est minorée ?

b. Soit $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.

i. En appliquant le théorème de la limite monotone à Δ_b, démontrer que f est dérivable à gauche et à droite en b et que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b) \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

ii. Montrer que f est continue en b.

c. Donner un exemple d'une fonction convexe et non continue sur un intervalle.

IV. Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Soit f une fonction dérivable sur I. On note f' sa fonction dérivée sur I.

14. Dans cette question, on suppose f convexe sur I.

a. Montrer que pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, on a

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b),$$

et en déduire que f' est croissante.

b. Justifier que la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

15. Dans cette question, on suppose f' croissante sur I.
Soit $(x, y) \in I$ tel que $x < y$. On considère la fonction ϕ définie sur $[0; 1]$ par

$$\forall t \in [0; 1],\ \phi(t) = tf(x) + (1 - t)f(y) - f\big(tx + (1 - t)y\big).$$

a. Démontrer que ϕ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée ϕ'.

b. En utilisant le théorème des accroissements finis pour f entre x et y, démontrer qu'il existe $\gamma \in]0; 1[$ tel que pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\phi'(t) = (x - y)\big(f'\left(\gamma x + (1 - \gamma)y\right) - f'\left(tx + (1 - t)y\right)\big).$$

c. En déduire les variations de ϕ.

d. En déduire que la fonction f est convexe sur I.

16. Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur I est convexe sur I si et seulement si f" est positive sur I.

V. Différentes inégalités

17. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave.

On définit la fonction $\psi : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & yf\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases}$

a. Démontrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$, on a

$$\psi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2) \leqslant \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \qquad (\star\star).$$

18. Application.
Soient $p, q \in]1; +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Dans cette question, $f : t \longmapsto t^{\frac{1}{p}}$

a. Démontrer que f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$.
En utilisant $(\star\star)$, démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$