Auto-évaluation # 2
POLYNÔMES ORTHOGONAUX, MÉTHODES DE QUADRATURE

Définitions, notations

(i) Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est *unitaire* si le coefficient de son monôme du plus haut degré est 1. Exemple : $P = X^3 - 3X^2 + 4$ est unitaire.

(ii) Par abus de notation, si $P \in \mathbb{R}[X]$, nous notons encore P la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$, $x \in [0,1]$. Rappelons que deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont égaux si et seulement si les deux fonctions polynomiales associées sont égales.

(iii) Une *formule de quadrature* sur $[0,1]$ est une « approximation » de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ d'une fonction f continue sur $[0,1]$ par une somme de la forme

$$I(f) := \sum_{j=1}^{k} \omega_j f(x_j),$$

où les k *nœuds* distincts $x_1, \dots, x_k \in [0,1]$ et les k *poids* $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbb{R}$ sont fixés. (Le nombre entier $k \geq 1$ peut varier selon la formule de quadrature.)

(iv) Une formule de quadrature est d'*ordre au moins* n si

$$I(P) = \int_0^1 P(x)\,dx,\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X].$$

(v) Une formule de quadrature est d'*ordre* n si

$$I(P) = \int_0^1 P(x)\,dx,\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],$$

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \text{ tel que } I(Q) \neq \int_0^1 Q(x)\,dx.$$

Exercice # 1. (Vrai ou faux) Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier *brièvement* la réponse donnée.

1. L'application

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R},\ \varphi(P,Q) := \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k), \forall\, P, Q \in \mathbb{R}_n[X],$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Même question que la précédente, mais cette fois-ci sur $\mathbb{R}[X]$.

3. On se donne un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Il existe au plus un polynôme unitaire de degré 2 orthogonal aux polynômes 1 et X.
   (b) Il existe un polynôme unitaire de degré 2 orthogonal aux polynômes 1 et X.
4. Il existe une formule de quadrature d'ordre au moins 0 avec $k = 1$.
5. Il existe une formule de quadrature d'ordre 1 avec $k = 1$.
6. Il existe une formule de quadrature d'ordre au moins 2 avec $k = 3$.

Exercice # 2. On se donne k nœuds $0 \leq x_1 < \ldots < x_k \leq 1$.

1. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2k}[X]$ tel que $P(x_j) = 0$, $j = 1, \ldots, k$, et $P(x) > 0, \forall x \in [0, 1] \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de formule de quadrature à k nœuds et d'ordre au moins $2k$.

Exercice # 3. Nous travaillons dans l'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0; 1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx, \ \forall\, f, g \in C([0; 1], \mathbb{R}),$$

et de la norme $\| \ \|$ induite par ce produit scalaire, c'est-à-dire

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx \right)^{1/2}, \forall\, f \in C([0; 1], \mathbb{R}).$$

On définit $P_0 := 1$ (le polynôme constant 1), $P_1 := X - 1/2$ et, par récurrence pour $n \geq 2$,

$$\lambda_n := \frac{\langle X P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2}, \ \mu_n := \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2}, \ P_n := (X - \lambda_n) P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}.$$

1. (a) Calculer P_2.
   (b) Montrer que P_2 a deux racines distinctes, les deux dans $[0; 1]$.
   (c) On considère une formule de quadrature avec comme nœuds les racines x_1, x_2 de P_2 et avec des poids ω_1, ω_2 à déterminer.
      (i) Montrer qu'il existe un seul choix de ω_1 et ω_2 tel que la formule soit d'ordre au moins 1. À partir de maintenant, nous fixons ω_1, ω_2 de sorte que la formule de quadrature soit d'ordre au moins 1.
      (ii) Montrer que la formule de quadrature est d'ordre au moins 2. (On pourra évaluer $I(P_2)$.)
      (iii) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. En considérant la division euclidienne de P par P_2, montrer que la formule de quadrature est d'ordre au moins 3.
      (iv) Quel est l'ordre de la méthode de quadrature ?
2. Montrer, par récurrence sur n et après les avoir vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$, les propriétés suivantes :
   (a) P_n est un polynôme unitaire de degré n.
   (b) $\{P_0, \ldots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Si $n \geq 1$, alors $\langle P_n, P_\ell \rangle = 0, \forall\, \ell \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $\langle P_n, Q \rangle = 0, \forall\, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.