Auto-évaluation # 3
Étude de suites

Exercice # 1.

1. Montrer qu'une suite croissante de nombre réels a une limite (pas nécessairement finie). On pourra distinguer entre les suites majorées et celles qui ne le sont pas.
2. Calculer, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^2}$.

Exercice # 2. Étude de quelques séries et intégrales Cet exercice permet d'établir certaines inégalités utilisées dans l'exercice suivant.

1. Soit $A > 0$. Montrer que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq k \geq 1$, on a
$$\ln(n+A) - \ln(k+A) \leq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{j+A} \leq \ln(n-1+A) - \ln(k-1+A). \tag{1}$$
2. Soient $B, C > 0$. Montrer que la série
$$\sum_{j\geq 2} \left[\frac{1}{j+B} - \frac{1}{j+B+\ln(j+C)}\right] \tag{2}$$
converge.
3. Montrer que
$$\ln(1+x) < x, \ \forall\, x > 0. \tag{3}$$

Exercice # 3. Étude de la vitesse de convergence d'une suite Nous considérons une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ donnée par un premier terme arbitraire $x_1 \in \mathbb{R}$ et par la récurrence
$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Le but principal de cet exercice est d'étudier la vitesse de convergence de $(x_n)_{n\geq 1}$ vers sa limite dans le « cas intéressant » où $x_1 \in]0;1[$.

$\boxed{\text{A}}$ **Étude lorsque** $x_1 \notin]0;1[$

1. On suppose $x_1 < 0$. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ et calculer sa limite.
2. On suppose $x_1 > 1$. Déterminer le signe de x_2 et la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
3. Étudier le comportement de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ lorsque $x_1 = 0$, puis lorsque $x_1 = 1$.

$\boxed{\text{B}}$ **Étude préliminaire lorsque** $x_1 \in]0;1[$

1. Montrer que $x_n \in]0;1[, \forall\, n \geq 1$.

2. Montrer que la suite est strictement décroissante et converge vers 0.

$\boxed{\text{C}}$ **Étude de la vitesse de convergence de x_n vers 0 lorsque $x_1 \in]0;1[$** *Avant-propos* De la partie $\boxed{\text{B}}$, nous savons que $\dfrac{1}{x_n} \nearrow \infty$. Le but de cette partie est de décrire la vitesse de convergence de x_n vers 0, ou, de manière équivalente, de $\dfrac{1}{x_n}$ vers ∞. Plus spécifiquement, nous nous proposons de montrer que, si l'on écrit

$$\frac{1}{x_n} = n + \ln n + \beta_n, \ \forall\, n \geq 1, \tag{5}$$

(le nombre réel β_n étant uniquement déterminé par (5)), alors la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est bornée, et donc « $\dfrac{1}{x_n}$ se comporte à l'infini comme $n + \ln n$ ».

Dans la preuve, nous allons utiliser les résultats de l'exercice précédent.

Dans tout ce qui suit, on fixe $x_1 \in]0;1[$.

1. Dresser le tableau de variation de
$$[0;1] \ni x \mapsto f(x) := x - x^2.$$
2. Montrer que $x_n < 1/n, \forall\, n \geq 1$. On pourra raisonner par récurrence sur $n \geq 2$, en utilisant la monotonie de f.
3. On écrit, pour $n \geq 1$,
$$\frac{1}{x_n} = n + \alpha_n, \ \text{avec } \alpha_n > 0 \tag{6}$$
(ceci est possible, d'après la question précédente).
Montrer que $\alpha_2 > 1$ et
$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{1}{(n-1)+\alpha_n}, \ \forall\, n \geq 1. \tag{7}$$
4. En déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, ainsi que (avec $A := \alpha_2 - 1 > 0$) l'inégalité
$$\alpha_n \leq \alpha_2 + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j+A}, \ \forall\, n \geq 3. \tag{8}$$
5. Montrer que, pour un nombre $B > 0$ que l'on déterminera, on a
$$\alpha_n \leq \ln(n-1+A) + B, \ \forall\, n \geq 3. \tag{9}$$
6. En déduire que, pour un nombre $C > 0$ que l'on déterminera,
$$\alpha_n \geq \alpha_3 + \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{j+B+\ln(j+C)}, \ \forall\, n \geq 4. \tag{10}$$
7. Conclure, en prenant $\beta_n := \alpha_n - \ln n$. On utilisera les inégalités (9) et (10), la question 2 de l'exercice 2, et le fait, supposé connu, que la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \ln n\right)$ existe et est finie.