# PROBLÈME 1

***Objet*** : Répartition de boules dans des boîtes, et étude asymptotique.

$n$ désigne un entier naturel non nul.

On dispose d'une grande quantité de boules discernables, et on les répartit une à une au hasard entre $n$ boîtes numérotées de 1 à $n$.

Les boîtes sont vides au départ.

## *Partie I*

On note $p_j(r,n)$ la probabilité pour qu'il reste exactement $j$ boîtes vides lorsque l'on a réparti $r$ boules.

Le but de cette partie est la détermination des probabilités $p_j(r,n)$.

a) Quel est le nombre de répartitions des $r$ boules discernables dans les $n$ boîtes numérotées?

b) On désigne par $A(r,n)$ le nombre de répartitions de $r$ boules discernables ne laissant vide aucune des $n$ boîtes.

Déterminer $A(r,n)$ pour $n=1$, puis $n=2$.

c) On considère à nouveau $n$ boîtes.

(i) Soit $B_i$, l'évènement défini par la condition : "La répartition des $r$ boules laisse vide la boîte $n \circ i$", $1 \leq i \leq n$, ($i$ est fixé).

Calculer $P(B_i)$.

(ii) Plus généralement, soit$B_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, l'évènement : "la répartition des $r$ boules laisse vides les boîtes $n \circ i_1, i_2, \ldots, i_k$".

Calculer la probabilité $P(B_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$.

(iii) Soit $C_{r,n}$, l'évènement "une boîte au moins est vide lorsque l'on a placé $r$ boules au hasard dans les $n$ boîtes".

Exprimer $C_{r,n}$ à l'aide des évènements $B_i$, $1 \leq i \leq n$.

(iv) En appliquant convenablement la formule de Poincaré, déduire de ce qui précède la probabilité $P(C_{r,n})$.

(v) Déterminer la probabilité $p_0(r,n)$.

d) On adopte la convention $C_n^j = 0$ si $j > n$.

(i) Montrer que $p_j(r,n) = C_n^j.\left(\frac{n-j}{n}\right)^r.p_0(r,n-j)$

(on rappelle que $p_j(r,n)$ désigne la probabilité d'avoir exactement $j$ boîtes vides lorque l'on a réparti $r$ boules entre les $n$ boîtes).

*Indication* : on pourra exprimer en fonction de $A(r,n-j)$, le nombre de répartitions des $r$ boules qui laissent vides $j$ des $n$ boîtes exactement.

(ii) En déduire l'expression de $p_j(r,n)$.

## *Partie II*

On se propose d'étudier le comportement asymptotique des probabilités $p_j(r,n)$ lorsque $r$ et $n$ tendent vers $+\infty$ de sorte que $n.e^{-\frac{r}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

On considèrera que le nombre $r$ de boules dépend de $n$, et on le notera $r_n$.

a) Soit $a$, un réel strictement positif, et $N$, un entier tel que $N > a$.

(i) Justifier l'existence de la somme $R_N(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{N+k}}{(N+k)!}$.

(ii) Montrer que : $\forall k \geq 1 : \frac{a^{N+k}}{(N+k)} \leq \frac{a^N}{N!}.\left(\frac{a}{N}\right)^k$.

(iii) En déduire que $0 < R_N(a) \leq \frac{a^N}{N!}.\frac{a}{N-a}$.

b) Montrer qu'il existe un réel $a > \lambda$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* : n.e^{-\frac{r_n}{n}} < a$.

On choisit désormais ainsi le réel $a$.

c) (i) Justifier l'inégalité $\forall t > -1 : ln(1+t) \leq t$.

(ii) On pose $u_i(r_n,n) = C_n^i.\left(1-\frac{i}{n}\right)^{r_n}$ si $0 \leq i \leq n$, et $u_i(r_n,n) = 0$ si $i \geq n+1$.

Montrer que, pour $1 \leq i \leq n-1$ :

$$u_i(r_n, n) = \frac{n^i}{i!}.(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{i-1}{n}).(1-\frac{i}{n})^{r_n}.$$

(iii) En appliquant convenablement l'inégalité de la question c) (i) précédente, en déduire que :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] : 0 \leq u_i(r_n, n) \leq \frac{a^i}{i!}.$$

(iv) Conclure que $\forall i \in \mathbb{N} : 0 \leq u_i(r_n, n) \leq \frac{a^i}{i!}$.

d) On fixe un entier $N$, $N > a$, et on considère $n > N$.

(i) Démontrer les inégalités :

(1) $$\left| \sum_{i=N+1}^{+\infty} (-1)^i.u_i(r_n, n) \right| \leq \frac{a^N}{N!}.\frac{a}{N-a}.$$

(2) $$\left| \sum_{i=N+1}^{+\infty} (-1)^i.\frac{\lambda^i}{i!} \right| \leq \frac{a^N}{N!}.\frac{a}{N-a}.$$

(ii) En déduire que l'on a :

$$| e^{-\lambda} - p_0(r_n, n) | \leq \left| \sum_{k=0}^{N} (-1)^i.(\frac{\lambda^i}{i!} - u_i(r_n, n)) \right| + 2.\frac{a^N}{N!}.\frac{a}{N-a}.$$

e) (i) Montrer l'équivalence : $u_i(r_n, n) \underset{+\infty}{\approx} \frac{n^i}{i!}.\left(1-\frac{i}{n}\right)^{r_n}$.

(ii) On pose $n.e^{-\frac{r_n}{n}} = \lambda + \varepsilon_n$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Justifier cette écriture, et montrer que $\frac{n^i}{i!}.\left(1-\frac{i}{n}\right)^{r_n} = \frac{1}{i!}.e^{v_n}$,

où $v_n = i.ln(n) - n.ln(\frac{\lambda+\varepsilon_n}{n}).ln(1-\frac{i}{n})$.

(iii) A l'aide de développements limités convenables, montrer que :

$$v_n = -\frac{i^2}{2.n}.ln(n) + o(\frac{ln(n)}{n}) + i.ln(\lambda) + o(1).$$

Conclure que $(v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} i.\ln(\lambda)$, et que $u_i(r_n, n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^i}{i!}$.

f) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $N$ assez grand pour que $2.\frac{a^N}{N!}.\frac{a}{N-a} < \varepsilon$.

En revenant à la définition de la limite, en déduire que $p_0(r_n, n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}$.

g) (i) Quelle est la limite de $p_j(r, n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

(ii) Soit $Y_n$, la v.a.r. égale au nombre de boîtes vides lorsque l'on place au hasard $r_n$ boules dans les $n$ boîtes.

Interpréter le résultat précédent.