Exercice 7 ⭐⭐⭐ - Une preuve du théorème des séries alternées [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème des séries alternées : si (a_n) est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0, alors la suite (S_n) définie pour $n\geq 0$ par

$$S_n=\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

est convergente. On pose pour $n \geq 0$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ell \leq u_n$.
4. On suppose pour toute la suite de l'exercice que $a_n = \frac{1}{n+1}$. Donner un algorithme donnant un encadrement de ℓ d'amplitude inférieur ou égal à 10^{-6}.
5. Dans cette question, on va prouver que $\ell = \ln 2$.
    5.1. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, justifier l'égalité
    $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}.$$
    5.2. On pose, pour $n \geq 1$,
    $$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$
    Démontrer que (I_n) tend vers 0.
    5.3. Conclure.

Indication

Corrigé

Exercice 8 ★★ - Série harmonique [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$
2. En déduire un équivalent de H_n.
3. On pose pour $n \geq 1$, $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Vérifier que, pour $n \geq 2$, $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
4. Étudier la monotonie de (v_n). En déduire que (v_n) est convergente. On note γ sa limite et on pose pour $n \geq 1$, $w_n = H_n - \ln(n+1) - \gamma$.
5.
    5.1. Vérifier que, pour tout $x \geq 0$,
    $$\ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2}dt.$$
    5.2. En déduire que, pour tout $x \geq 0$,
    $$|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}.$$
6. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$,
$$|w_n - w_{n-1}| \leq \frac{1}{2n^2}.$$
7. Soit $M > N \geq 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=N+1}^{M}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{N}.$$

8. En déduire, sous les mêmes hypothèses, que

$$|w_M-w_N|\leq\frac{1}{2N}$$

puis que

$$|v_N-\gamma|\leq\frac{1}{2N}.$$

9. Écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Indication

Corrigé

Exercice 9 ★★★★ - Somme de la série des inverses des carrés [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt\longrightarrow_{n\to+\infty}0.$$

2. On pose $A_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos(kt)$. Vérifier que, pour $t\in]0,\pi]$, on a

$$A_n(t)=\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$

3. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n\geq 1$,

$$\int_0^\pi(at^2+bt)\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que

$$\int_0^\pi(at^2+bt)A_n(t)=S_n-\frac{\pi^2}{6}$$

où on a posé $S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}$.

4. Déduire des questions précédentes que $S_n\to\frac{\pi^2}{6}$.

Indication

Corrigé