Écrit blanc : Polynômes de Bernoulli et formule de Stirling

Le but de ce problème est de montrer la *formule de Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, \left(\frac{n}{e}\right)^n . \tag{1}$$

La preuve de (1) proposée ci-dessous repose sur trois ingrédients : les polynômes de Bernoulli, la formule d'Euler-Maclaurin, et le calcul des intégrales de Wallis.

I Premiers polynômes de Bernoulli

Définitions.

(i) Pour $m = 1, 2$, les fonctions de Bernoulli B_m (désignées traditionnellement comme *polynômes de Bernoulli*) sont d'abord définies sur $[0, 1]$ par :

$$B_1(x) := x - \frac{1}{2},\ B_2' = 2B_1,\ \int_0^1 B_2(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

(ii) Le *nombre de Bernoulli* b_2 est défini par $b_2 := B_2(0)$.

Questions.

1. Déterminer $B_2(x)$, $x \in [0, 1]$, et la valeur de b_2.
2. Montrer que $B_2(1) = b_2$.

À partir de sa définition sur $[0, 1]$, B_2 est définie sur $\mathbb{R}$ par prolongement par 1-périodicité, c'est-à-dire $B_2(x) := B_2(\{x\})$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, où $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x.

II Formule d'Euler-Maclaurin

1. Soit $g \in C^1([0, 1])$. Montrer que

$$\frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}g(1) = \int_0^1 g(x)\, dx + \int_0^1 B_1(x)\, g'(x)\, dx. \tag{3}$$

2. Soit $g \in C^2([0, 1])$. Montrer que

$$\frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}g(1) = \int_0^1 g(x)\, dx + \frac{b_2}{2}(g'(1) - g'(0)) - \frac{1}{2}\int_0^1 B_2(x)\, g''(x)\, dx. \tag{4}$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $f \in C^2([1, n])$. Montrer la *formule d'Euler-Maclaurin*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f(1) + \sum_{j=2}^{n-1} f(j) + \frac{1}{2}f(n) = \int_1^n f(x)\, dx &+ \frac{b_2}{2}(f'(n) - f'(1)) \\ &- \frac{1}{2}\int_1^n B_2(x)\, f''(x)\, dx.\end{aligned} \tag{5}$$

(Indication : on pourra utiliser la 1-périodicité de B_2 et se ramener à (4).)

III Intégrales de Wallis

Définition. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'*intégrale de Wallis* I_n est définie par $I_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, dx$.

Questions.

1. Montrer que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}, \forall\, n \geq 2$.
2. En déduire que le produit $P := (2p+1)\, I_{2p}\, I_{2p+1}$ ne dépend pas de l'entier $p \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $P = \dfrac{\pi}{2}$.
4. Montrer que $I_{2p-2} \geq I_{2p-1} \geq I_{2p} \geq I_{2p+1}, \forall\, p \in \mathbb{N}, p \geq 1$, et en déduire que
$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(2p+1)}} \leq I_{2p} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(2p-1)}}, \ \forall\, p \in \mathbb{N},\ p \geq 1. \tag{6}$$
5. Déterminer la formule de I_{2p} et en déduire que
$$\frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi p}} \text{ quand } p \to \infty. \tag{7}$$

IV Formule de Stirling

Dans cette partie, f est la fonction $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln x$, et n est un entier ≥ 2.

1. Écrire la formule d'Euler-Maclaurin (5) sur l'intervalle $[1, n]$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty B_2(x)\, f''(x)\, dx$ est absolument convergente.
3. En déduire que
$$\ln(n!) = \frac{1}{2} \ln n + n\, \ln n - n + D + R_n, \tag{8}$$
avec
$$D := \frac{11}{12} + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{B_2(x)}{x^2}\, dx,\ R_n := \frac{1}{12n} - \frac{1}{2} \int_n^\infty \frac{B_2(x)}{x^2}\, dx. \tag{9}$$
4. En déduire que, avec $C := e^D$, on a
$$n! \sim C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ quand } n \to \infty. \tag{10}$$
5. Utiliser (7) pour montrer que $C = \sqrt{2\pi}$. Conclure.