Feuille de TD # 1
Convexité, inégalités fondamentales

NB. Dans ce qui suit, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Exercice # 1. (Vrai ou faux) Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. Un trinôme de second degré est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 2x - 5$ est convexe.
3. $[0, \infty[\ni x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est convexe.
4. $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{\sin x}$ est convexe.
5. $[0, \infty[\ni x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est convexe.
6. Si $p > 1$ est un nombre réel, alors $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|^p$ est convexe.
7. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et $a \in \mathbb{R}$, alors af est convexe.
8. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors f est continue.
9. Si $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ est convexe, alors f est dérivable.
10. Si $f : I \to [0, \infty[$ est convexe et deux fois dérivable, alors $f'' + f \geq 0$.
11. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors e^f est convexe.
12. Si $f : I \to]0, \infty[$ est concave, alors $\ln f$ est concave.
13. Si $x > 0$, alors $1 < \dfrac{e^x - 1}{x} < e^x$.
14. Si I est ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, et f a un point de maximum, alors f est constante.

Exercice # 2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Ordonner les nombres suivants :

$$\alpha := f(1/2),\ \beta := \frac{f(0) + f(1)}{2},\ \gamma := \frac{\beta}{3} + \frac{f(1/3) + f(2/3)}{3},\ \delta := \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Exercice # 3. Soit $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction convexe, décroissante, telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Soient

$$u_n := f(1) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_1^n f(x)\, dx,\ v_n := u_n + \frac{f(n) + f(n+1)}{2},$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.

Exercice # 4.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Si $a, b, c, d \in I$ sont tels que $a \leq b, c \leq d$ et $a + d = b + c$, montrer que $f(a) + f(d) \geq f(b) + f(c)$.
2. Soit $p > 1$.Montrer que
$$(1 + x)^p + (1 - x)^p \leq 2^p, \; \forall\, x \in [0, 1]. \tag{1}$$
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que
$$x^\alpha + y^\alpha \geq (x + y)^\alpha, \; \forall\, x, y > 0. \tag{2}$$

Exercice # 5. Justifier, en invoquant la convexité, les inégalités suivantes :

$$e^x \geq 1 + x, \; \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$
$$\ln x \leq x - 1, \; \forall\, x > -1, \tag{4}$$
$$\sin x \leq x, \; \forall\, x \geq 0, \tag{5}$$
$$\tan x \geq x, \forall\, x \in [0, \pi/2[. \tag{6}$$

Exercice # 6. (Principe du trinôme)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $A := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $B := (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère le trinôme
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) := \sum_{j=1}^{n} (a_j t + b_j)^2.$$
À partir du signe du discriminant de f :
   (a) Montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*
   $$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots a_n^2)\,(b_1^2 + \cdots + b_n^2). \tag{7}$$
   (b) Montrer que l'on a égalité dans (7) si et seulement si les vecteurs A et B sont colinéaires.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $A := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $B := (b_1 \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1^2 > a_2^2 + \cdots + a_n^2$. À partir de l'étude du trinôme
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) := (a_1 t + b_1)^2 - (a_2 t + b_2)^2 - \cdots - (a_n t + b_n)^2 \; :$$
   (a) Montrer l'*inégalité d'Aczél*
   $$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \cdots - a_n b_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2)\,(b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2). \tag{8}$$
   Indication : trouver un $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \leq 0$.
   (b) Montrer que l'on a égalité dans (8) si et seulement si les vecteurs A et B sont colinéaires.

Exercice # 7. (Encore Cauchy-Schwarz) Montrer (7) par récurrence sur n, comme suit :

1. Montrer (7) si $n = 2$.
2. Supposer (7) vraie pour n et 2, et montrer que (7) est vraie pour $n + 1$.

Exercice # 8. (Encore Cauchy-Schwarz)

1. En utilisant l'inégalité
$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{9}$$
que l'on montrera au préalable, montrer (7) dans le cas particulier où $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $b_1^2 + \cdots + b_n^2 = 1$.
2. En choisissant convenablement $\alpha, \beta > 0$ et en appliquant la question précédente aux vecteurs αA et βB, montrer (7) dans le cas général.

Exercice # 9. (Toujours Cauchy-Schwarz) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Établir l'*identité de Lagrange*
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2, \tag{10}$$
et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que le cas d'égalité dans cette inégalité.

Exercice # 10. (Quelques applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $x_1, \ldots, x_n > 0$.
   (a) Montrer l'inégalité
   $$H(x_1, \ldots, x_n) := \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} := A(x_1, \ldots, x_n) \tag{11}$$
   entre la *moyenne arithmétique* $A(x_1, \ldots, x_n)$ et la *moyenne harmonique* $H(x_1, \ldots, x_n)$.
   (b) Montrer que l'on a égalité dans (11) si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Soit $S := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$.

   Montrer les inégalités suivantes :
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq \frac{S}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \forall\, 0 \leq x < 1, \tag{12}$$
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} < \sqrt{2}\, S, \tag{13}$$
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n+k}} \leq (\ln 2)^{1/2}\, S, \tag{14}$$
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \leq \binom{2n}{n}^{1/2} S. \tag{15}$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k\right)^2 \leq \begin{cases} n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (n+1) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \tag{16}$$

4. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m, n \geq 2$. Soit $\left(c_{ij}\right)_{1 \leq i \leq m}^{1 \leq j \leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On pose

$$L := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|, \; C := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |c_{ij}|.$$

Soient $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j\right)^2 \leq L \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \, y_j^2, \; \forall \, j \in [\![1, n]\!]. \tag{17}$$

(b) En déduire l'*inégalité de Schur*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j\right)^2 \leq CL \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2. \tag{18}$$

(c) Montrer que l'inégalité de Schur et l'inégalité Cauchy-Schwarz se déduisent l'une de l'autre.

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in [0, \infty[$, $\forall \, i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{1/2} b_{jk}^{1/2} c_{ki}^{1/2}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}. \tag{19}$$

Indication : on pourra commencer par majorer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{jk}^{1/2} c_{ki}^{1/2}$.

6. **(Inégalité de Loomis-Whitney)** Soit $A \subset \mathbb{R}^3$ un compact. On définit la projection de A sur le plan xOy par :

$$A_{xy} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, \exists \, z \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y, z) \in A\}.$$

On définit de manière analogue les projections A_{yz}, respectivement A_{zx}, de A sur yOz, respectivement zOx. L'*inégalité de Loomis-Whitney* affirme que le volume de A est contrôlé par les aires des compacts A_{xy}, A_{yz} et A_{zx} au travers de l'inégalité

$$\text{vol}\,(A) \leq \sqrt{\text{aire}\,(A_{xy})\,\text{aire}\,(A_{yz})\,\text{aire}\,(A_{zx})}. \tag{20}$$

(a) Donner deux cas géométriquement différents d'égalité dans (20).

(b) Vérifier la validité de (20) pour une boule euclidienne fermée.

(c) Montrer l'analogue discret suivant de l'inégalité de Loomis-Whitney. Soit $A \subset (\mathbb{N}^*)^3$ un ensemble fini. Alors

$$\text{card}\,(A) \leq \sqrt{\text{card}\,(A_{xy})\,\text{card}\,(A_{yz})\,\text{card}\,(A_{zx})}. \tag{21}$$

Indication : avec n convenable, prendre, dans (19), $a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{si } (i,j) \in A_{xy} \\ 0, & \text{si } (i,j) \notin A_{xy} \end{cases}$, et définir de manière analogue b_{ij} et c_{ij}.

(d) Que se passe-t-il si $A \subset \mathbb{Z}^3$?

(e) Proposer une preuve de l'inégalité de Loomis-Whitney (20), en indiquant les résultats liés à la théorie de l'intégration qui interviennent dans la preuve.

7. **(Inégalité de Cramér-Rao)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $f_j : I \to [0, \infty[$, $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, des fonctions telles que :

$$f_1(\theta) + \cdots + f_n(\theta) = 1,\ \forall\, \theta \in I. \tag{22}$$

(a) Interpréter (22) de manière probabiliste.

(b) Un *estimateur sans biais de* θ est, sous réserve d'existence, une suite finie $\{g_1, \ldots, g_n\}$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(\theta)\, g_j = \theta,\ \forall\, \theta \in I. \tag{23}$$

Donner une interprétation probabiliste de (23).

(c) Nous faisons les hypothèses suivantes :

$$f_j(\theta) > 0,\ \forall\, j \in [\![1, n]\!],\ \forall\, \theta \in I, \tag{24}$$

$$f_j \text{ est dérivable}, \forall\, j \in [\![1, n]\!]. \tag{25}$$

On définit l'*information de Fisher*

$$I(\theta) := \sum_{j=1}^{n} \frac{[f_j'(\theta)]^2}{f_j(\theta)},\ \forall\, \theta \in I.$$

Donner une interprétation probabiliste de $I(\theta)$.
Montrer l'*inégalité de Cramér-Rao*

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(\theta)\, (g_j - \theta)^2 \geq \frac{1}{I(\theta)},\ \forall\, \theta \in I, \tag{26}$$

et lui donner une interprétation probabiliste.

Exercice # 11. (Inégalité de Jensen continue) Soit $f : [0,1] \to I$ une fonction continue.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \in I$. On pourra distinguer entre les différents types d'intervalles ($I = [a,b]$, $I =]a, \infty[$, etc.).
2. Soit $\Phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Montrer l'*inégalité de Jensen*

$$\Phi\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right) \leq \int_0^1 \Phi(f(x))\, dx. \tag{27}$$

   On pourra commencer par établir une inégalité pour des sommes de Riemann.
3. Que devient (27) dans les cas suivants :
   (a) $I = \mathbb{R}$, $\Phi(t) = e^t, \forall\, t \in \mathbb{R}$;
   (b) $I =]0, \infty[$, $\Phi(t) = \ln t, \forall\, t > 0$;
   (c) $I =]0, \infty[$, $\Phi(t) = t\, \ln t, \forall\, t > 0$?
4. (a) Que devient (27) si $I = \mathbb{R}$ et $\Phi(t) = t^2, \forall\, t \in \mathbb{R}$?
   (b) S'inspirer de l'exercice # 6 pour montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz sous forme intégrale*

$$\left(\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\, dx \int_0^1 g^2(x)\, dx, \forall\, f, g \in C^0([0,1], \mathbb{R}), \tag{28}$$

   et déterminer le cas d'égalité dans (28).
   (c) Si $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$, montrer que

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\, dx \geq [f(1) - f(0)]^2. \tag{29}$$

   Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité dans (29) ?

Exercice # 12.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable. Si $x_0 \in I$ vérifie $f'(x_0) = 0$, montrer que x_0 est un point de minimum de f.
2. Cette fois-ci, nous supposons I ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, mais par nécessairement dérivable. Soit $x_0 \in I$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) x_0 est un point de minimum de f.
   (b) $f'_g(x_0) \leq 0$ et $f'_d(x_0) \geq 0$.
3. Adapter l'énoncé précédent au cas où I n'est pas ouvert et x_0 est une extrémité de I.

Exercice # 13. (Applications des inégalités des pentes)

1. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction concave telle $f(0) = 0$. Montrer que f est *sous-additive*, c'est-à-dire, $f(x + y) \leq f(x) + f(y), \forall\, x, y \geq 0$.
2. Soit $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction convexe telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. Montrer que f est décroissante.

3. Soit $f :]0,\infty[\to [0,\infty[$ une fonction concave. Montrer que f est croissante.

Exercice # 14. (Convexité stricte) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe deux fois dérivable telle que $f''(x) > 0, \forall\, x \in I$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $x_1, \ldots, x_n \in I$. Montrer que :
$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right), \tag{30}$$
et que nous avons égalité dans (30) si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$.
Indication : utiliser la formule de Taylor à l'ordre deux avec point intermédiaire.
2. Généraliser le résultat précédent comme suit : si $p_1, \ldots, p_n \in]0,1[$, $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$, montrer que
$$p_1\, f(x_1) + \cdots + p_n\, f(x_n) \leq f(p_1\, x_1 + \cdots + p_n\, x_n), \tag{31}$$
et que nous avons égalité dans (31) si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Exercice # 15. (Moyennes généralisées) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $x_1, \ldots, x_n > 0$. Pour $p \in \mathbb{R}^*$, on définit
$$\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_p(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$
On définit également
$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0(x_1, \ldots, x_n) := (x_1 \cdots x_n)^{1/n}.$$

1. Qui sont $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_{-1}$ et $\mathfrak{M}_0$?
2. Montrer que $\mathfrak{M}_p \geq \mathfrak{M}_1, \forall\, p > 1$.
3. En déduire que $]0,\infty[\ni p \mapsto \mathfrak{M}_p$ est croissante.
4. En déduire que $]-\infty,0[\ni p \mapsto \mathfrak{M}_p$ est croissante.
5. Montrer que $\lim_{p\to 0} \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_0$.
6. En déduire que $\mathbb{R} \ni p \mapsto \mathfrak{M}_p$ est croissante.
7. Si les x_j ne sont pas tous égaux, montrer que $\mathbb{R} \ni p \mapsto \mathfrak{M}_p$ est strictement croissante.

Exercice # 16. (Étude d'une méthode itérative) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que :

(i) $f(0) = f(1) = 0$.

(ii) $0 < f''(x) \leq 1, \forall\, x \in [0,1]$.

On se propose d'étudier une méthode itérative de résolution de l'équation
$$f'(x) = 0. \tag{32}$$

1. **(Questions préliminaires)**

(a) En examinant la monotonie de f', montrer que (32) a exactement une solution $X \in]0,1[$.

(b) Indiquer le tableau de variation de f. On fera intervenir X.

(c) Supposons que $0 < X \leq 1/2$. Montrer que $-1/8 \leq f(X) < 0$. On pourra utiliser la formule de Taylor à l'ordre deux avec point intermédiaire en X pour exprimer $f(0)$.

(d) Obtenir la conclusion de la question précédente sous l'hypothèse $1/2 \leq X < 1$.

(e) Sans hypothèse sur X, montrer que $-1/8 \leq f(x) \leq 0, \forall\, x \in [0,1]$.

2. **(La méthode itérative)** Soit $\alpha > 0$ un paramètre à déterminer ultérieurement. Si $x_0 \in]0,1[$, on définit par récurrence $x_{n+1} := x_n + \alpha f(x_n) f'(x_n), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

   (a) Y a-t-il un problème avec cette définition ? Que faut-il montrer au préalable ?

   On suppose, à partir de maintenant, que $0 < \alpha \leq 8$.

   (b) Si $x_n \in [X, 1[$, montrer que $0 \leq x_{n+1} - X \leq x_n - X$. On pourra utiliser le fait que $f'(x_n) = f'(x_n) - f'(X)$. En déduire que, si $x_0 \in [X,1[$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et décroissante.

   (c) Énoncer et montrer une propriété analogue à la précédente si $x_0 \in]0, X]$.

   (d) En déduire de ce qui précède que, pour toute valeur initiale $x_0 \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$.

3. **(Variante)** Dans cette question, on suppose $X = 1/2$. On considère la même méthode itérative que précédemment, mais cette fois-ci avec $0 < \alpha < 16$.

   (a) On suppose que x_n est bien défini et que $x_n \in]0,1[$. Montrer que $|x_{n+1} - X| \leq |x_n - X|$, et en déduire en particulier que $x_{n+1} \in]0,1[$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.

   (b) On admet le résultat suivant.

   Lemme. Soit $\beta \in]-1,0]$. Soient $(y_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que : (i) $y_{n+1} = \beta_n y_n, \forall\, n \geq 0$; (ii) $\beta_n \in]\beta, 1], \forall\, n \geq 0$. Alors la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge.

   En utilisant le lemme avec $y_n := x_n - X, \forall\, n \geq 0$, montrer que, si $0 < \alpha < 16$, alors, pour tout $x_0 \in]0,1[$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$.

   (c) Bonus : essayer de montrer le lemme. On pourra considérer deux cas : a) la suite $(\beta_n)_{n\geq 0}$ contient un nombre fini de termes négatifs; b) la suite $(\beta_n)_{n\geq 0}$ contient une infinité de termes négatifs.