# Feuille de TD # 2
## Polynômes orthogonaux, formules de quadrature

**Définitions, notations**

(i) Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est *unitaire* si le coefficient de son monôme du plus haut degré est 1. Exemple : $P = X^3 - 3X^2 + 4$ est unitaire.

(ii) Par abus de notation, si $P \in \mathbb{R}[X]$, nous notons encore $P$ la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$, $x \in [0, 1]$. Rappelons que deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont égaux si et seulement si les deux fonctions polynomiales associées sont égales.

(iii) Une *formule de quadrature* sur $[0, 1]$ est une « approximation » de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ d'une fonction $f$ continue sur $[0, 1]$ par une somme de la forme

$$I(f) := \sum_{j=1}^{k} \omega_j f(x_j),$$

où les $k$ *nœuds* distincts $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$ et les $k$ *poids* $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbb{R}$ sont fixés. (Le nombre entier $k \geq 1$ peut varier selon la formule de quadrature.)

(iv) Une formule de quadrature est d'*ordre au moins* $n$ si

$$I(P) = \int_0^1 P(x)\, dx,\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X].$$

(v) Une formule de quadrature est d'*ordre* $n$ si

$$I(P) = \int_0^1 P(x)\, dx,\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \exists\, Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \text{ tel que } I(Q) \neq \int_0^1 Q(x)\, dx.$$

**Exercice # 1.** On se donne un nœud $x_1 \in [0; 1]$ et on en cherche un autre, $x_2$, et des poids $\omega_1$ et $\omega_2$ tels que la formule de quadrature $I(f) = \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$ soit d'ordre au moins 2.

1. Écrire le système (S) que doivent satisfaire $x_2$, $\omega_1$, $\omega_2$.
2. Si $x_1 = x_2$, montrer que $x_1 = 1/2$, et que la méthode ne peut pas être d'ordre $\geq 2$.
3. Dans la suite, nous supposons que $x_1 \neq 1/2$.
   (a) Montrer que (S) a toujours une et une seule solution $(x_2, \omega_1, \omega_2)$.
   (b) Montrer qu'il existe $x_2, \omega_1, \omega_2$ donnant une formule de quadrature d'ordre au moins 2 si et seulement si $|x_1 - 1/2| \geq 1/6$.

**Exercice # 2. Formule de quadrature de Gauss-Legendre.** Nous travaillons dans l'espace $C([0;1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0;1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx,\ \forall\, f, g \in C([0;1],\mathbb{R}),$$

et de la norme $\|\ \|$ induite par ce produit scalaire, c'est-à-dire

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{1/2}, \forall\, f \in C([0;1],\mathbb{R}).$$

On définit $P_0 := 1$ (le polynôme constant 1), $P_1 := X - 1/2$ et, par récurrence pour $n \geq 2$,

$$\lambda_n := \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|^2},\ \mu_n := \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2},\ P_n := (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}.$$

Rappelons que :

(i) Les polynômes $P_n$ sont unitaires et satisfont $\langle P_n, Q\rangle = 0, \forall\, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

(ii) Les polynômes $P_n$ sont uniquement déterminés par la propriété (i).

1. Soient $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\ell < 1$ les racines de $P_n$ comprises dans l'intervalle $]0;1[$.
   (a) Construire un polynôme $Q \in \mathbb{R}_\ell([X])$ tel que
   $$P_n(x)\, Q(x) > 0,\ \forall\, x \in ]0;1[\setminus\{x_1, \ldots, x_\ell\}.$$
   (b) En déduire que nécessairement $\ell = n$.
   (c) Montrer que toutes les racines de $P_n$ sont réelles, simples et appartiennent à $]0;1[$.
2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 < x_1 < \ldots < x_k < 1$ les racines de $P_k$.
   (a) Montrer qu'il existe un et exactement un choix des poids $\omega_1, \ldots, \omega_k$ de sorte que la formule de quadrature
   $$I(f) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j\, f(x_j)$$
   soit d'ordre au moins $k - 1$.
   (b) Pour ce choix des poids, montrer que la formule de quadrature est d'ordre au moins $2k - 1$. On pourra, pour $P \in \mathbb{R}_{2k-1}([X])$, considérer la division de $P$ par $P_k$.
   (c) Montrer que la formule de quadrature est d'ordre $2k - 1$.
3. On considère une formule de quadrature d'ordre $2k - 1$ associée à $k$ nœuds $0 \leq y_1 < \ldots < y_k \leq 1$. Soit $T := (X - y_1)\cdots(X - y_k)$.
   (a) Montrer que $\langle T, Q\rangle = 0, \forall\, Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$.
   (b) En déduire qu'il existe une et une seule formule de quadrature à $k$ nœuds qui soit d'ordre $2k - 1$, et que ces nœuds sont dans $]0;1[$. C'est la *formule de Gauss-Legendre*.
   (c) Donner un autre nom à la formule de quadrature d'ordre 1 à un nœud.

(d) Écrire la formule de quadrature d'ordre $3$ à deux nœuds.

4. On considère la formule de Gauss-Legendre à $k \geq 2$ nœuds $x_1, \dots, x_k$, de poids $\omega_1, \dots, \omega_k$. En considérant, pour chaque $1 \leq j \leq k$, le polynôme

$$P_j := \prod_{1 \leq i \leq k, i \neq j} (X - x_i)^2,$$

montrer que $\omega_j > 0, \forall\, j$.

**Exercice # 3. Formule Taylor avec reste intégral.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in C^{n+1}([0;1], \mathbb{R})$. Soit

$$T_n := \frac{f(0)}{0!} X^0 + \frac{f'(0)}{1!} X^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} X^j$$

le $n^e$ *polynôme de Taylor de $f$ en* $0$.

Pour $x \in [0,1]$, soit

$$I_n = I_n(x) := \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

1. Calculer $I_0$ en fonction de $f(x)$ et $f(0)$.
2. Obtenir une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$.
3. Montrer la *formule de Taylor à l'ordre $n$ avec reste intégral*

$$\begin{aligned} f(x) =& T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt, \\ =& \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt, \ \forall\, f \in C^{n+1}([0;1]). \end{aligned}$$

4. On définit, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$y_+ := \begin{cases} y, & \text{si } y \geq 0 \\ 0, & \text{si } y < 0 \end{cases}.$$

Montrer que

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_0^1 [(x-t)_+]^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt, \ \forall\, f \in C^{n+1}([0;1]). \tag{1}$$

**Exercice # 4. Noyau de Peano.** Le but de cet exercice est d'étudier une formule exacte de l'erreur

$$E(f) := \int_0^1 f(x)\, dx - \sum_{j=1}^{k} \omega_j\, f(x_j), \ \forall\, f \in C([0;1], \mathbb{R}),$$

associée à une formule de quadrature

$$I(f) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \, f(x_j), \; \forall \, f \in C([0;1], \mathbb{R}).$$

Pour ce faire, nous admettons le résultat suivant (dont on donnera une esquisse de preuve à la fin de l'exercice).

**Théorème.** Soit

$$K(t) := \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} - \sum_{x_j \geq t} \omega_j \, (x_j - t)^n, \; \forall \, t \in [0,1],$$

le *noyau de Peano*. Alors $K \in C^{n-1}([0;1], \mathbb{R})$ et

$$E(f) = \frac{1}{n!} \int_0^1 K(t) \, f^{(n+1)}(t) \, dt, \; \forall \, f \in C^{n+1}([0;1], \mathbb{R}).$$

1. Déterminer $K$ pour la formule du trapèze et $n$ l'ordre de la formule.
2. On considère la formule du point milieu.
   (a) Déterminer $K$ lorsque $n$ est l'ordre de la formule.
   (b) En déduire que
   $$|E(f)| \leq \frac{1}{24} \sup\{|f''(x)| \, ; \, x \in [0;1]\}, \; \forall \, f \in C^2([0;1], \mathbb{R}).$$
3. (a) Soit $U(x) := x^{n+1}, \forall \, x \in [0;1]$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 K(t) \, dt = \frac{1}{n+1} E(U)$.
   (b) Si $K \geq 0$, montrer que
   $$|E(f)| \leq \frac{E(U)}{(n+1)!} \sup\{|f^{(n+1)}(x)| \, ; \, x \in [0;1]\}, \; \forall \, f \in C^{n+1}([0;1], \mathbb{R}).$$
4. On esquisse ici la preuve du théorème ci-dessus.
   (a) Montrer, par récurrence sur $j \geq 1$, que la fonction
   $$\mathbb{R} \ni y \mapsto [y_+]^j = \begin{cases} y^j, & \text{si } y \geq 0 \\ 0, & \text{si } y \leq 0 \end{cases},$$
   est de classe $C^{j-1}$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que le noyau de Peano $K$ est de classe $C^{n-1}$.
   (c) Avec $g_t(x) := [(x-t)_+]^n, \forall \, t, x \in [0;1]$, montrer que $E(g_t) = K(t), \forall \, t \in [0,1]$.
   (d) Soit $R_n$ le reste dans la formule de Taylor (1), de sorte que $f = T_n + R_n, \forall \, f \in C^{n+1}([0;1], \mathbb{R})$.
      i. Montrer que $E(f) = E(R_n)$.
      ii. En utilisant la définition de $R_n$ et le théorème de Fubini (justifier brièvement son utilisation), montrer l'identité
      $$E(R_n) = \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(t) \left[ \int_0^1 [(x-t)_+]^n \, dx - \sum_{j=1}^{k} \omega_j \, [(x_j - t)_+]^n \right] dt,$$
      puis conclure.