Feuille de TD # 3
Études de suites

Exercice # 1. Moyenne arithmético-géométrique Soient $0 < x_0 < y_0$ deux nombres réels. On définit, par récurrence sur n, x_n et y_n par les formules

$$x_{n+1} := \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
   Leur limite est la *moyenne arithmético-géométrique* $M(x_0, y_0)$ *de* x_0 *et* y_0.
2. Qui, de x_n et y_n, est le plus proche de $M(x_0, y_0)$?
3. Si $\varepsilon_n := y_n - x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, montrer que
   $$\frac{\varepsilon_n^2}{8y_n} \leq \varepsilon_{n+1} \leq \frac{\varepsilon_n^2}{8x_n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
4. Soient $x_0 := 1$ et $y_0 := 4$.
   (a) Montrer que
   $$M(1,4) - x_n \leq 2^{-5\cdot 2^{n-1}+3},\ \forall\, n \geq 1.$$
   (b) Combien de chiffres significatifs de $M(1,4)$ donne l'approximation $M(1,4) \approx x_4$?

Exercice # 2. Séries alternées Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de nombres réels, de limite 0. On pose

$$S_0 := b_0,\ S_1 := b_0 - b_1,\ S_2 := b_0 - b_1 + b_2, \ldots,\ \text{et, en général,}\ S_n := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j b_j.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2k})_{k\geq 0}$ et $(S_{2k+1})_{k\geq 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que
   $$|S_n - \ell| \leq b_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice # 3. Développement en série du ln Pour $x \in]-1;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_n(x) := x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}.$$

Soit

$$f :]-1;\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := \ln(1+x),\ \forall\, x \in]-1;\infty[.$$

1. Montrer que $f'(x) = \sum_{j\geq 0}(-1)^j x^j$, $\forall\, x \in]-1;1[$.
2. Montrer que $|f'(x) - S'_n(x)| \leq \dfrac{|x|^n}{1-|x|}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in]-1;1[$.
3. Montrer que $|f(x) - S_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in]-1;1[$.
4. En déduire le développement en série entière

$$\ln(1+x) = \sum_{j\geq 1}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j},\ \forall\, x \in]-1;1[.$$

Exercice # 4. Deux formules pour $\ln 2$

$\boxed{\text{A}}$ On reprend les notations de l'exercice précédant. On se propose de montrer que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n(1) = \sum_{j\geq 0}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}.$$

(a) Montrer que

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0;1[.$$

(b) En déduire que $|S_n(1) - \ln 2| \leq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$, et conclure.

$\boxed{\text{B}}$ Montrer que

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Exercice # 5. : Méthode des approximations successives : étude de cas Si $\alpha > 0$ est un paramètre, soit

$$f_\alpha : [0;\infty[\to \mathbb{R},\ f_\alpha(x) := \alpha + \ln(1+x),\ \forall\, x \geq 0.$$

1. Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = x$ a une et une seule solution $y(\alpha) \in]0;\infty[$.
2. On se donne $x_0 \in [0;\infty[$ et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la récurrence

$$x_{n+1} := f_\alpha(x_n),\ \forall\, n \geq 0.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie, monotone et converge vers $y(\alpha)$. De plus, montrer que, si $x_0 \neq y(\alpha)$, alors $x_n \neq y(\alpha)$, $\forall\, n \geq 0$. (On pourra étudier les cas $x_0 < y(\alpha)$, $x_0 > y(\alpha)$, $x_0 = y(\alpha)$.)

3. On suppose $x_0 \neq y(\alpha)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - y(\alpha)}{x_n - y(\alpha)} = \frac{1}{1 + y(\alpha)}.$$

En déduire que, si $x_0 \neq y(\alpha)$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $y(\alpha)$ *allegro ma non troppo* : il existe des constantes $C_1, C_2 \in]0; \infty[$ et des nombres $0 < r_1 < r_2 < 1$ tels que

$$C_1 r_1^n \leq |x_n - y(\alpha)| \leq C_2 r_2^n, \ \forall\, n \geq 0.$$

Exercice # 6. Si $\beta \geq 1$ est un paramètre, soit

$$g_\beta : [0; \infty[\to \mathbb{R}, g_\beta(x) := e^x - \beta, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que l'équation $g_\beta(x) = x$ a une et une seule solution $z(\beta) \in]0; \infty[$.
2. On se donne $x_0 \geq z(\beta)$ et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la récurrence

   $$x_{n+1} := g_\beta(x_n), \ \forall\, n \geq 0.$$

   Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ a toujours une limite, mais que cette limite est égale à $z(\beta)$ si et seulement si $x_0 = z(\beta)$.

Exercice # 7. **Récurrences linéaires et matrices** Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la récurrence

$$x_{n+2} := \alpha x_{n+1} + \beta x_n, \ \forall\, n \geq 0.$$

On pose

$$V_n := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \forall\, n \geq 0.$$

1. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $V_{n+1} = AV_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. Si A est diagonalisable, exprimer V_n en fonction de V_0.
3. Cas particulier : calculer x_n si $\alpha = 2$, $\beta = -2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 3$.
4. Calculer x_n si $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Exercice # 8. Trouver le terme général de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ donnée par $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, et la récurrence

$$x_{n+2} := 3x_{n+1} - 2x_n + 2^n, \ \forall\, n \geq 0.$$

Exercice # 9. **Critère d'Abel** Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que :

(i) $(b_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de nombres réels, de limite 0.

(ii) $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que $|T_n| \leq M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, où $T_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$.

Soit

$$S_n := a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{j=0}^{n} a_jb_j, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

En partant de l'identité $a_j = T_j - T_{j-1}, \forall\, j \in \mathbb{N}$ (avec la convention $T_{-1} = 0$), montrer que :

1. $|S_m - S_n| \leq 2M\, b_{n+1}, \forall\, 0 \leq n < m.$
2. La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
3. $|S_n - \ell| \leq 2M\, b_{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Application. Si $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\imath nx}}{n}$ converge si et seulement si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.