Exercice 7 ★★★★ - Avec le critère des séries alternées [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ une fonction continue décroissante, de limite nulle en $+\infty$. On pose $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(t)\sin(t)dt$.

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)\sin(t)dt$ est convergente. Quel est son signe?
3. On suppose $f(x)\geq 1/x$ pour $x\geq x_0$. Prouver que $\int_0^{+\infty}f(t)\sin(t)dt$ n'est pas absolument convergente.

Indication

Corrigé

Exercice 8 ★★★ - Différence d'exponentielles [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient $0<a<b$.

1. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$.
2. Soient $0<x<y$. Démontrer que
$$\int_x^y\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt.$$
3. Démontrer que, pour tout réel $z>0$,
$$e^{-bz}\ln\frac{b}{a}\leq\int_{az}^{bz}\frac{e^{-t}}{t}dt\leq e^{-az}\ln\frac{b}{a}.$$
En déduire que
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\ln\frac{b}{a}.$$

Indication

Corrigé

Exercice 9 ★★ - Fonction décroissante [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $\int_0^{+\infty}f(t)dt$ converge.

1. Démontrer que $f\geq 0$.
2. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. Justifier que $\int_{x/2}^{x}f(t)dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
4. En déduire que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Indication

Exercice 10 ★★★ - Équivalence [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

1. Montrer que pour tout $x>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est convergente.

On pose $F(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ si $x>0$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer F'.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$.
4. On cherche un équivalent de $F(x)$ lorsque $x\to 0^+$.
   - 4.1. Démontrer que la fonction $t\mapsto\frac{e^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0.
   - 4.2. Démontrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $x\in]0,1]$,
   $$\left|\int_x^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt\right|\leq C.$$
   - 4.3. En déduire que $F(x)\sim-\ln x$ lorsque $x\to 0^+$.
5. On cherche un équivalent de $F(x)$ lorsque $x\to+\infty$.
   - 5.1. Montrer que pour tout $x>0$, l'int\'egrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ est convergente.
   - 5.2. Montrer que pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt\leq\frac{1}{x}F(x)$.
   - 5.3. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que $F(x)\sim\frac{e^{-x}}{x}$ lorsque $x\to+\infty$.

Indication

Corrigé

Exercice 5 ★★★ - Un calcul un peu sophistiqué [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $n\geq 1$ et $1\leq k\leq n$.

1. Calculer la dérivée k-ème de $x\mapsto x^{n-1}$ et $x\mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire la dérivée n-ième de la fonction suivante : $x\mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

Indication

Corrigé

Pour progresser

Exercice 6 ★★ - Valeur approchée de $\ln 2$ [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient $f,g:\mathbb R_+\to\mathbb R$ définies par

$$g(x)=(x-2)e^x+(x+2),\ f(x)=\frac{x}{e^x-1}\textrm{ si }x\neq 0\textrm{ et }f(0)=1.$$

1. Démontrer que $g\geq 0$ sur $\mathbb R_+$.
2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb R_+$. Que vaut $f'(0)$?
3. Vérifier que $f''(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ pour tout $x>0$. En déduire que $|f'(x)|\leq 1/2$ sur $\mathbb R_+$.
4. On définit une suite (u_n) par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Prouver que, pour tout $n\in\mathbb N$, on a

$$|u_n-\ln 2|\leq \left(\frac 12\right)^n\ln 2.$$

Indication

Corrigé

Exercice 8 ★★★ - Un grand classique! [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

On considère $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$, on a $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x}}P_n(1/x)$ où $P_n\in\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Indication

Corrigé

Exercice 9 ★★★★ - Théorème du point fixe [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $f:[a;b]\to[a,b]$ une application dérivable. On suppose qu'il existe $k\in]0,1[$ tel que, pour tout $x\in[a,b]$, on a $|f'(x)|\leq k$. On dit que $\gamma\in[a,b]$ est un point fixe de f si $f(\gamma)=\gamma$.

1. Démontrer que f admet un point fixe.
2. Démontrer que ce point fixe est unique. On le note γ.
3. Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_0\in[a,b]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$. Démontrer que (u_n) converge vers γ.

Indication

Corrigé

Exercice 10 ★★ - Une étude de fonction, fonction réciproque [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(\arctan(2x+1))$.

1. Étudier le sens de variation de f, ses limites en $\pm\infty$.
2. Résoudre l'équation $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que la restriction de f à $[-1/2,+\infty[$ admet une fonction réciproque g dont on précisera l'ensemble de définition.
4. Calculer $g'(\sqrt{2}/2)$.

Indication

Corrigé