

Feuille de TD # 1
NORMES, ESPACES DE BANACH

Exercice # 1. (Autour de l'inégalité de Minkowski) Soit (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré. Soit $1 \leq p < \infty$.

A Soit $\Phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante telle que $\Phi(0) = 0$.

Pour $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, soit

$$\|f\| := \inf \left\{ \lambda > 0; \int_X \Phi(|f|/\lambda) d\mu \leq 1 \right\}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = \infty$).

1. Montrer que $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire.
2. Retrouver l'inégalité de Minkowski dans $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, ℓ^p et $L^p(X)$.
3. Si, de plus, Φ est strictement convexe et strictement croissante, caractériser les fonctions mesurables $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| < \infty.$$

4. Obtenir le cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski dans $L^p(X)$.

B Soit q le conjugué de p .

1. Montrer que

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_X fg d\mu; g \in L^q(X), \|g\|_q \leq 1 \right\}, \forall f \in L^p(X).$$

2. Interpréter ce résultat en terme de norme de forme linéaire.
3. Retrouver encore une fois l'inégalité de Minkowski.

Exercice # 2. (Espace de Banach de fonctions lipschitziennes)

1. Soit (X, d) un espace métrique non-vide. On fixe un point $x_0 \in X$.

Soit

$$\|f\| := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\} \in [0, \infty], \forall f : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Soit

$$\text{Lip}_0(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f(x_0) = 0 \text{ et } \|f\| < \infty\}.$$

Montrer que $(\text{Lip}_0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

2. Plus généralement, soit (Y, N) un espace vectoriel normé.

Soit

$$\|f\| := \sup \left\{ \frac{N(f(x) - f(y))}{d(x, y)} ; x, y \in X, x \neq y \right\} \in [0, \infty], \forall f : X \rightarrow Y.$$

Soit

$$\text{Lip}_0(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y ; f(x_0) = 0 \text{ et } \|f\| < \infty\}.$$

Si Y est un espace de Banach, montrer que $(\text{Lip}_0(X, Y), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

3. Si X et Y sont des espaces vectoriels normés munis des distances induites par les normes respectives et $x_0 = 0$, montrer que $\mathcal{L}(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $\text{Lip}_0(X, Y)$.

Exercice # 3. (Norme à poids) Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Soit $E := C([0, 1], \mathbb{R})$. On définit

$$\|f\| := \sup_{x \in [0, 1]} \alpha(x) |f(x)|, \forall f \in E, \text{ et l'ensemble } B := \{x \in [0, 1] ; \alpha(x) > 0\}.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme si et seulement $\overline{B} = [0, 1]$.

Exercice # 4. (Un cas de non densité de C^1) Montrer que $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\text{Lip}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} ; x, y \in [-1, 1], x \neq y \right\}.$$

Plus spécifiquement, montrer que $[-1, 1] \ni x \mapsto f(x) := |x|$ satisfait $\|f - g\| \geq 1$, $\forall g \in C^1([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice # 5. (Espace de Banach de fonctions holomorphes) On travaille avec la mesure de Lebesgue sur le disque unité \mathbb{D} de \mathbb{C} . Pour $1 \leq p \leq \infty$, soit

$$\mathcal{A}_p := \text{Hol}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{D}),$$

muni de la norme $\|\cdot\|_p$.

1. Soient K un compact de \mathbb{D} et R tel que

$$\rho := \max\{|z| ; z \in K\} < R < 1.$$

Montrer que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(1 - R)^{1/p}(R - \rho)} \|f\|_p, \forall z \in K, \forall f \in \mathcal{A}_p.$$

2. En déduire que \mathcal{A}_p est un espace de Banach.

Exercice # 6. (Fonctions qui s'annulent à l'infini) Soit (X, d) un espace métrique σ -compact. (C'est-à-dire, il existe une suite (K_j) de compacts de X tels que $\cup_j K_j = X$. Exemples importants : \mathbb{R}^n ou un ouvert de \mathbb{R}^n .) Soit

$$C_0(X) := \{f \in C(X, \mathbb{C}) ; \forall \varepsilon > 0, \exists j \text{ tel que } |f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \notin K_j\},$$

muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que

$$C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) ; \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0\},$$

avec égalité si la suite (K_j) est croissante et $\cup_j \overset{\circ}{K}_j = \mathbb{R}^n$.

2. Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , montrer que

$$C_0(\Omega) \subseteq \{f \in C(\Omega, \mathbb{C}) ; \lim_{d(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} f(x) = 0\},$$

avec égalité si la suite (K_j) est croissante et $\cup_j \overset{\circ}{K}_j = \Omega$.

3. Montrer que $C_0(X)$ est un espace de Banach.

Exercice # 7. (Un espace de Banach ne peut avoir une base dénombrable) Le but de cet exercice est de montrer que, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, alors E ne peut avoir une base algébrique dénombrable. (Rappel : un ensemble est *dénombrable* s'il est en correspondance bijective avec \mathbb{N}^* .) Preuve par l'absurde : supposons que E a une base algébrique $\{e_n\}_{n \geq 1}$, c'est-à-dire que tout élément x de E s'écrit exactement d'une façon sous la forme $x = \sum_{n \geq 1} x_k e_k$, avec un nombre

fini de scalaires x_k non-nuls.

En utilisant cette hypothèse, nous allons construire une suite de Cauchy de E qui ne converge pas; la contradiction obtenue va achever la preuve.

1. Posons $E_n := \text{Vect} \{e_1, \dots, e_n\}$, $\forall n \geq 1$. En utilisant le lemme de Riesz, construire une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ telle que

- (a) $f_n \in E_n, \forall n \geq 1$.
- (b) $\|f_n\| = 1, \forall n \geq 1$.
- (c) $\|f_{n+1} - y\| \geq 1, \forall n \geq 1, \forall y \in E_n$.
- (d) $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une base de $E_n, \forall n \geq 1$.
- (e) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ est une base de E .

2. On pose $x_n := \sum_{1 \leq k \leq n} 3^{-k} f_k, \forall n \geq 1$. Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.

3. Soient $m \geq 1$ et $y \in E_m$. Montrer que $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2 \cdot 3^{m+1}}, \forall n \geq m + 1$.

4. Conclure.

Exercice # 8. (Isométries)

A Dans cette partie, on travaille dans \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne et du produit scalaire standard.

1. Soit $f(x) := Ax + b$, où A est une matrice orthogonale et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est une isométrie, c'est-à-dire $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. On se propose d'établir la réciproque du résultat ci-dessus.

- (a) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

- (b) En déduire que f envoie la base canonique $\{e_i\}$ sur une base orthonormée $\{f_i\}$.
- (c) Montrer que $f(x) = \sum \langle x, e_i \rangle f_i$. En déduire que $f(x) = Ax$, avec A orthogonale.
- (d) En déduire la réciproque de 1.

B Dans cette partie, on travaille dans un espace normé E . Soit $f : E \rightarrow E$ une isométrie bijective telle que $f(0) = 0$. On se propose de montrer que f est linéaire (théorème de Mazur-Ulam).

1. On suppose, de plus, que (*) $f((x+y)/2) = (f(x) + f(y))/2, \forall x, y \in E$. Montrer que f est linéaire. Ainsi, il suffit de montrer (*).
2. Dans cette partie, nous présentons un schéma itératif permettant de définir, pour $x, y \in E$, le point milieu $(x+y)/2$ en utilisant uniquement la norme. Cette construction est inspirée par le fait que, dans un espace préhilbertien ou, plus généralement dans un espace uniformément convexe, nous avons l'équivalence

$$z = (x+y)/2 \iff \|z-x\| = \|z-y\| = \|x-y\|/2.$$

On fixe $x, y \in E$. On définit, par récurrence,

$$H_1 := \{z \in E; \|z-x\| = \|z-y\| = \|x-y\|/2\}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$H_n := \{z \in H_{n-1}; \|z-t\| \leq [\text{diam}(H_{n-1})]/2 \text{ pour tout } t \in H_{n-1}\}.$$

Montrer que :

- (a) $\text{diam } H_n \leq 2^{1-n} \|x-y\|$.
 - (b) H_n est invariant par l'application $z \mapsto x+y-z$.
 - (c) le point $(x+y)/2$ est dans tous les H_n .
 - (d) $\bigcap H_n = \{(x+y)/2\}$.
3. On définit, de même, des ensembles K_n , mais à partir de $f(x)$ et $f(y)$ au lieu de x et y . Montrer que $f(H_n) = K_n$. Conclure.

Exercice # 9. (Projection sur un convexe fermé de L^p) Nous travaillons dans un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) et avec $1 < p < \infty$. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant.

Théorème. (Riesz) Soit $C \subset L^p(X)$ un convexe fermé non-vide. Alors pour toute $f \in L^p(X)$ il existe une et une seule $g \in C$ telle que

$$\|f-g\|_p \leq \|f-h\|_p, \forall h \in C.$$

A Dans cette partie, on établit le résultat suivant : si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$[f \in L^p(X), \|f\|_p = 1, g \in L^p(X), \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p < 2 + \delta] \implies \|g\|_p < \varepsilon.$$

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe $C_\lambda \in]0, 2]$ tel que

$$[t \in \mathbb{R}, |t| \geq \lambda] \implies |1+t|^p + |1-t|^p - 2 \geq C_\lambda |t|^p.$$

2. En déduire que

$$\int_{\{x \in X; |g(x)| \geq \lambda |f(x)|\}} (|f + g|^p + |f - g|^p - 2|f|^p) \geq C_\lambda \int_{\{x \in X; |g(x)| \geq \lambda |f(x)|\}} |g|^p.$$

3. Conclure, en choisissant convenablement λ et δ .

B Dans cette partie, on montre le théorème de Riesz.

1. Obtenir la conclusion si $f \in C$.

2. Si $f \notin C$, soit $(f_j) \subset C$ telle que $\|f - f_j\|_p \rightarrow d(f, C)$. Montrer que (f_j) est une suite de Cauchy. On pourra utiliser la partie **A** et le fait que $(f_j + f_k)/2 \in C, \forall j, k$.

3. Conclure.