

Feuille de TD # 2

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES : NORME, SPECTRE

Exercice # 1. Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et norme $\| \cdot \|$, et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur *autoadjoint* et *positif*. Montrer que

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, x \rangle ; x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Exercice # 2. Dans les questions suivantes, $T : E \rightarrow F$ est une application linéaire entre les espaces vectoriels normés (E, N_1) et (F, N_2) . Déterminer si T est continue et, si tel est le cas, déterminer sa norme $\|T\|$.

1. E est un espace pré-hilbertien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme induite $\| \cdot \|$, $F := \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle, $a \in E$ est fixé, $T(x) := \langle x, a \rangle, \forall x \in E$.

2. $E = F := C([0, 1], \mathbb{R}), N_1(f) = N_2(f) := \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, T(f) := fg$, où $g \in E$ est fixée.

3. E, F, T comme dans la question précédente, $N_1(f) := \|f\|_2 = \left(\int_0^1 (f(x))^2 dx \right)^{1/2}$,
 $N_2(f) := \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$.

4. $E = F := \mathbb{R}[X], N_1 \left(\sum_k a_k X^k \right) = N_2 \left(\sum_k a_k X^k \right) := \sum_k |a_k|, T(P) := P'$.

5. $E = F := \mathbb{R}_n[X], N_1 \left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k \right) = N_2 \left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k \right) := \sum_{0 \leq k \leq n} |a_k|, T(P) := P'$.

6. $E = F := \mathbb{R}[X], N_1 \left(\sum_k a_k X^k \right) = N_2 \left(\sum_k a_k X^k \right) := \sum_k k! |a_k|, T(P) := P'$.

Exercice # 3. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On munit \mathbb{R}^n de la norme $\| \cdot \|_p$, et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_p$ subordonnée à $\| \cdot \|_p$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que

1. $\|A\|_1 = \max_j \sum_{1 \leq i \leq n} |a_{ij}|$.

2. $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$.

3. $\|A\|_2 = \max\{\lambda^{1/2}; \lambda \in \sigma(A^*A)\}$.

4. Si $1 < p < \infty$, alors $\|A\|_p \leq \|A\|_1^{1/p} \|A\|_\infty^{1-1/p}$ (*inégalité de Schur*).

Exercice # 4. S'inspirer de la question 4 de l'exercice précédent pour montrer le résultat suivant. Soit $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) dy, \forall x \in [0, 1].$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on munit $E := C([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_p$, où, si $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

1. Rappeler pourquoi Tf est une fonction continue, et donc $T : E \rightarrow E$. Clairement, T est linéaire.
2. On pose

$$M_1 := \max_{y \in [0, 1]} \int_0^1 |K(x, y)| dx, \quad M_\infty := \max_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |K(x, y)| dy.$$

Montrer que $\|T\| \leq M_1^{1/p} M_\infty^{1-1/p}$.

Exercice # 5. Avec les notations de l'exercice précédent, montrer que, si $p = 2$,

$$\|T\| \leq \|K\|_2 = \left(\int_{[0, 1]^2} (K(x, y))^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Exercice # 6. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. Le but de cet exercice est de montrer qu'une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si et seulement si $\text{Ker } \varphi$ est fermé.

1. Montrer le sens direct.
2. Inversement, on suppose que $\text{Ker } \varphi$ est fermé.
 - (a) Montrer que $\varphi^{-1}(\{1\})$ est fermé.
 - (b) Montrer qu'il existe une boule $B(0, r)$ qui n'intersecte pas $\varphi^{-1}(\{1\})$.
 - (c) Montrez que, pour tout $x \in B(0, r)$, on a $|\varphi(x)| \leq 1$.
 - (d) Conclure.

Exercice # 7. Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On définit $Tf(0) := \pi f(0)/2$ et, pour $0 < x \leq 1$,

$$Tf(x) := \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy.$$

Démontrer que T est un opérateur continu de $(C([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ dans lui-même. Calculer $\|T\|$.

Exercice # 8. (Matrice de Hilbert)

1. Préliminaire : soit $(a_j)_{j \geq 1}$ une suite de nombres telle que

$$(b_j)_{j \geq 1} \in \ell^2 \implies \sum_{j \geq 1} a_j b_j \text{ converge.}$$

Montrer que $(a_j)_{j \geq 1} \in \ell^2$ et que

$$\|(a_j)_{j \geq 1}\|_2 = \max \left\{ \sum_{j \geq 1} a_j b_j; (b_j)_{j \geq 1} \in \ell^2, \|(b_j)_{j \geq 1}\|_2 \leq 1 \right\}.$$

Généralisation?

2. Montrer que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^{1/2}}{(\lambda + k)k^{1/2}} < \pi, \forall \lambda > 0.$$

Indication : utiliser la comparaison série-intégrale.

3. En déduire que l'opérateur

$$T : \ell(\mathbb{N}^*) \rightarrow \ell(\mathbb{N}^*), T((a_j)_{j \geq 1}) := \left(\sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{j+k} \right)_{j \geq 1}, \forall (a_j)_{j \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}^*),$$

est bien défini, continu et de normé $\|T\| \leq \pi$.

4. On considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$a_j = a_j^N := \begin{cases} 1/j^{1/2}, & \text{si } 1 \leq j \leq N, \\ 0, & \text{si } j > N. \end{cases}$$

(a) Montrer que $\|(a_j)_{j \geq 1}\|_2^2 \leq 1 + \ln N$.

(b) Montrer que, avec

$$U := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; s \geq 0, t \geq 0, 2 \leq s^2 + t^2 \leq N + 1\},$$

nous avons

$$\sum_{j, k \geq 1} \frac{a_k a_j}{j+k} \geq 4 \int_U \frac{1}{s^2 + t^2} ds dt.$$

(c) En déduire que $\|T\| = \pi$.

Exercice # 9. (Spectre) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe *non trivial* (non réduit à l'élément nul). Si $T \in \mathcal{L}(E)$, le spectre de T est

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas bijectif}\}.$$

La résolvante de T est

$$\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ est bijectif}\}.$$

1. Montrer qu'en général

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\} \subsetneq \sigma(T),$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas surjectif}\} \subsetneq \sigma(T).$$

2. Montrer que $\rho(T)$ est ouvert et que la fonction

$$\rho(T) \ni \lambda \mapsto f(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

est développable en série (avec coefficients dans $\mathcal{L}(E)$).

3. En déduire que, si $x \in E$ et $x' \in E'$, alors la fonction

$$\rho(T) \ni \lambda \mapsto f_{x,x'}(\lambda) := x'((T - \lambda I)^{-1}(x)) \in \mathbb{C}$$

est holomorphe.

4. Montrer que $\sigma(T)$ est un compact inclus dans le disque $\overline{\mathbb{D}}(0, \|T\|)$.

5. Calculer $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |f_{x,x'}(\lambda)|$.

6. En déduire que $\sigma(T) \neq \emptyset, \forall T \in \mathcal{L}(E)$.

Exercice # 10. On travaille dans $H := L^2([0, 1], \mathbb{C})$, avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $(Tf)(x) := xf(x), \forall x \in [0, 1], \forall f \in H$. Montrer que :

1. $\sigma(T) = [0, 1]$.
2. T n'a pas de valeur propre.
3. $\|T\| = 1$.

Exercice # 11. Soient H un espace de Hilbert complexe (de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et norme $\|\cdot\|$) et $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint. Soient

$$a := \inf\{\langle Tx, x \rangle; x \in H, \|x\| = 1\} \in \mathbb{R},$$

$$b := \sup\{\langle Tx, x \rangle; x \in H, \|x\| = 1\} \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\sigma(T) \subset [a, b]$, et donc en particulier que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Indications : si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, utiliser le lemme de Lax-Milgram pour montrer que $A - \lambda I$ est bijectif. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer que $A - \lambda I$: est injectif, d'image fermée, et que le orthogonal de son image est réduit à l'espace nul.

2. *Bonus.* Montrer que

$$]a, b[\subset \{\langle Tx, x \rangle; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

3. *Bonus.* Montrer que $a, b \in \sigma(T)$.

Exercice # 12. (La partie facile de la formule de Gelfand) Soient E un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que

$$r(T) := \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}. \quad (I)$$

(En fait, dans (I) il y a égalité : c'est la *formule de Gelfand*.)

2. Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}.$$