

Feuille de TD # 3
COMPACITÉ. CONNEXITÉ

Exercice # 1. (Principe de preuve pour montrer la convergence d'une suite) Soient (X, d) un espace métrique, $(x_j) \subset X$ et $x \in X$.

1. Montrer que $x_j \not\rightarrow x$ si et seulement si : il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{\varphi(j)})$ tels que $d(x_{\varphi(j)}, x) \geq \varepsilon, \forall j$.
2. Soit $x \in X$. Si toute sous-suite de (x_j) contient une sous-suite qui converge vers x , montrer que $x_j \rightarrow x$.

Analogue si $X = \overline{\mathbb{R}}$?

Exercice # 2. (Extraction d'une suite à partir d'une suite de Cauchy) Soient (X, d) un espace métrique et $(x_j) \subset X$ une suite de Cauchy. Soit $(\alpha_k) \subset]0, \infty[$ une suite telle que $\alpha_k \rightarrow 0$. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $d(x_{\varphi(k)}, x_{\varphi(\ell)}) < \alpha_k, \forall 0 \leq k \leq \ell$.

Exercice # 3. Dans un espace métrique (X, d) , soit $(x_j)_{j \geq 1} \subset X$ telle que $x_j \rightarrow x_0$. Montrer que l'ensemble $\{x_j ; j \geq 0\}$ est compact.

Exercice # 4. Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.

Exercice # 5. Montrer que toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^n . (Indication : si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n , montrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.)

Exercice # 6. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et non-borné. Soit $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. f continue.
2. $f(x) > 0, \forall x \in F$.
3. $\liminf_{x \in F, \|x\| \rightarrow \infty} f(x) > 0$.

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \geq C, \forall x \in F$.

Proposer des variantes « utiles » de ce résultat.

Exercice # 7. Soit (X, d) un espace métrique. Soient K un compact de X et $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de K . Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ (*constante de Lebesgue*) tel que :

$$\forall x \in K, \exists j = j(x) \in J \text{ tel que } B(x, \delta) \subset U_j.$$

Exercice # 8. Soient (K, d) une espace métrique compact et (Y, δ) un espace métrique. Soit $f \in C(K \times Y, \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $g : Y \rightarrow C(K, \mathbb{R})$, $g(y) := f(\cdot, y), \forall y \in Y$, est continue. (Indication : utiliser le premier exercice.)
2. Montrer que l'application $Y \ni y \mapsto \max_{x \in K} f(x, y)$ est continue.

Exercice # 9. Soit (K, d) un espace métrique compact. Soit $f : K \rightarrow K$ telle que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \forall x, y \in K \text{ tels que } x \neq y.$$

Utiliser la méthode des approximations successives pour montrer que f a (exactement) un point fixe.

Exercice # 10. Soit (X, d) un espace métrique avec la propriété suivante : il existe une suite (K_ℓ) de compacts tels que $\cup K_\ell = X$ et $K_\ell \subset \overset{\circ}{K}_{\ell+1}, \forall \ell$. Un tel X est *exhaustible par des compacts*.

1. Montrer que les espaces compacts et les ouverts de \mathbb{R}^n sont exhaustible par des compacts.
2. Montrer que X est séparable.
3. Soit $K \subset X$ un compact. Montrer qu'il existe ℓ avec la propriété $K \subset K_\ell$.
4. Soit $f : X \rightarrow Y$ (avec Y espace métrique). Si $f|_{K_\ell}$ est continue, $\forall \ell$, montrer que f est continue.

Exercice # 11.

1. (*Procédé diagonal*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(x_j^n)_{j \geq 0}$ une suite bornée de nombres réels. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(j)}^n)_{j \geq 0}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Indication : utiliser le deuxième exercice.)

Généralisation ?

2. (*Cas « utile » du théorème d'Alaoglu-Bourbaki*) Soit X un espace de Banach séparable. Soit $(f_j) \subset X'$ une suite bornée. Montrer qu'il existe $f \in X'$ et une sous-suite (f_{j_k}) telle que

$$f_{j_k}(x) \rightarrow f(x), \forall x \in X.$$

3. (*Cas « utile » du théorème d'Ascoli*) Soit (X, d) un espace métrique avec la propriété suivante : il existe une suite (K_ℓ) de compacts tels que $\cup K_\ell = X$ et $K_\ell \subset \overset{\circ}{K}_{\ell+1}, \forall \ell$. (On dit que X est *exhaustible par de compacts*. Exemples : les espaces compacts et les ouverts de \mathbb{R}^n .) Soit $(f_j) \subset C(X, \mathbb{C})$ une suite de fonctions telle que :

- (a) Pour tout $x \in X$, $(f_j(x))$ est une suite (numérique) bornée.
- (b) Pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$[y \in X, d(x, y) < \delta] \implies |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon, \forall j.$$

Montrer qu'il existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ et une sous-suite (f_{j_k}) qui converge uniformément sur les compacts vers f .

Énoncer une variante de ce résultat lorsque X est supposé uniquement séparable.

Exercice # 12. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. (a) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$.

(b) Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(K)$ est compact.

Une fonction avec l'une des propriétés équivalentes (a) ou (b) est une fonction *propre*.¹

2. Si f est propre, l'image (directe) d'un fermé de \mathbb{R}^n est fermée.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non-constant. Montrer que la fonction polynomiale associée $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est propre, et en déduire le théorème fondamental de l'algèbre.

Exercice # 13.

1. (*Lemme de Steinitz*) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m > n+1$. Soient $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^n$ est combinaison convexe de x_1, \dots, x_m , alors il existe $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1} \leq m$ tels que x soit combinaison convexe de $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+1}}$.
2. (*Théorème de Carathéodory*) L'enveloppe convexe d'une partie compacte de \mathbb{R}^n est compacte.

Exercice # 14. Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ un *compact convexe*, respectivement *fermé convexe* non-vides et disjoints. Montrer qu'il existe un hyperplan (affine) fermé de \mathbb{R}^n qui sépare strictement les deux ensembles. Indication : considérer $a \in K$ et $b \in F$ tels que

$$\|a - b\|_2 \leq \|x - y\|_2, \forall x \in K, \forall y \in F,$$

et l'hyperplan affine H passant par $(a + b)/2$ et orthogonal à $[a, b]$.

Exercice # 15. Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $T(B(0, 1))$ est précompacte dans Y .
2. Pour toute suite bornée $(x_j) \subset X$, la suite (Tx_j) contient une sous-suite convergente.

Si T a l'une des propriétés équivalentes 1 ou 2, T est *compact*, et on écrit $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Exercice # 16. Avec les notations de l'exercice précédent :

1. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $R(T)$ est de dimension finie (T est *de rang fini*), alors T est compact.
2. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et il existe une suite $(T_j) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ telle que :
 - (a) $\|T_j - T\| \rightarrow 0$;
 - (b) Chaque T_j est de rang fini,
 alors $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Généralisation de ce résultat?

Exercice # 17.

1. Soit $T((a_n)_{n \geq 0}) := (2^{-n}a_n)_{n \geq 0}$. Montrer que $T \in \mathcal{K}(\ell^p, \ell^p)$.
2. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu), (Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν σ -finies. Soit $K \in \mathcal{L}^2(X \times Y)$ (préciser le sens de cette hypothèse) et, si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ et $x \in X$, soit

$$(Tf)(x) := \int_Y K(x, y) f(y) d\nu(y).$$

(Préciser le sens de cette définition.) Montrer que $T \in \mathcal{K}(L^2(Y), L^2(X))$.

1. En anglais, *proper function*. En français, risque de confusion avec les fonctions propres (en anglais : *eigenfunctions*) d'un opérateur linéaire.

Exercice #18. Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, soient

$$|f|_\alpha := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} ; x, y \in [0, 1], x \neq y \right\},$$

$$C^\alpha([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; |f|_\alpha < \infty\}, \text{ muni de } \|f\|_\alpha := |f|_\alpha + \|f\|_\infty.$$

Soient $0 < \beta < \alpha \leq 1$ et $1 \leq p \leq \infty$.

1. Montrer que

$$|f|_\beta \leq (|f|_\alpha)^{\beta/\alpha} (2\|f\|_\infty)^{1-\beta/\alpha}, \forall f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty, \forall f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

2. Montrer que, si $0 < \beta < \alpha \leq 1$ et $1 \leq p \leq \infty$, les inclusions $C^\alpha([0, 1]) \hookrightarrow C([0, 1])$, $C^\alpha([0, 1]) \hookrightarrow L^p([0, 1])$ et $C^\alpha([0, 1]) \hookrightarrow C^\beta([0, 1])$ sont compactes. (Indication : utiliser le théorème d'Ascoli et la première partie de l'exercice.)

Exercice #19. Le but de cet exercice est d'établir le résultat suivant.

Théorème de Peano. Soit $f : [t_0, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \rightarrow [-c, c]$ une fonction continue. Soit $d := \min(a, b/c)$. Alors il existe $x \in C^1([t_0, t_0 + d], [x_0 - b, x_0 + b])$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in [t_0, t_0 + d] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \quad (1)$$

Pour simplifier les calculs, dans ce qui suit nous prenons $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, de sorte que $d = 1$.

Montrer le théorème de Peano en suivant la stratégie suivante. Pour $j \geq 1$, on définit une fonction x_j , sur les intervalles $[k/j, (k+1)/j]$, $k = 0, \dots, j-1$, par récurrence sur k , comme suit :

$$\begin{aligned} x_j(t) &:= t f(0, 0), \text{ si } 0 \leq t \leq 1/j \\ x_j(t) &:= x_j(1/j) + (t - 1/j)f(1/j, x_j(1/j)), \text{ si } 1/j \leq t \leq 2/j \\ &\vdots \\ x_j(t) &:= x_j(k/j) + (t - k/j)f(k/j, x_j(k/j)), \text{ si } k/j \leq t \leq (k+1)/j \\ &\vdots \end{aligned}$$

Notons qu'aux points k/j , $1 \leq k \leq j-1$, x_j est définie deux fois, mais que les deux définitions sont cohérentes.

1. Montrer que :

- (a) $|x_j(k/j)| \leq k/j$, $\forall 0 \leq k \leq j-1$, d'où en particulier la définition de x_j a un sens.
- (b) $|x_j(t) - x_j(s)| \leq |t - s|$ et $|x_j(t)| \leq t$, $\forall j \geq 1$, $\forall s, t \in [0, 1]$.

(c) Si $0 \leq k \leq j - 1$ et $k/j \leq t \leq (k+1)/j$, alors

$$\begin{aligned} x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s)) ds &= \sum_{0 \leq \ell \leq k-1} \int_{\ell/j}^{(\ell+1)/j} [f(\ell/j, x_j(\ell/j)) - f(s, x_j(s))] ds \\ &\quad + \int_{k/j}^t [f(k/j, x_j(k/j)) - f(s, x_j(s))] ds. \end{aligned}$$

(d) Avec

$$\begin{aligned} M_j := \sup\{|f(\sigma, u) - f(s, v)| ; \sigma, s \in [0, 1], u, v \in [-1, 1], \\ |\sigma - s| \leq 1/j, |u - v| \leq 1/j\}. \end{aligned}$$

on a

$$\left| x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s)) ds \right| \leq M_j t, \forall j \geq 1, \forall t \in [0, 1].$$

2. En déduire que la suite $(x_j)_{j \geq 1}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction $x \in C([0, 1], [-1, 1])$ qui vérifie

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s)) ds, \forall t \in [0, 1].$$

3. Conclure.

Exercice # 20. Soit U une partie ouverte et connexe d'un espace normé. Si $x, y \in U$, montrer qu'il existe dans U une ligne polygonale connectant x et y .

Exercice # 21. Soit \mathcal{C} le cercle unité du plan complexe. Soient (X, d) un espace métrique et $f \in C(X, \mathcal{C})$. Un relèvement de f est une fonction $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$ telle que $f = e^{i\varphi}$.

1. Si X est connexe et φ_1, φ_2 sont des relèvements de f , montrer que $\varphi_1 - \varphi_2$ est un multiple (constant) de 2π .
2. Si X est connexe et $\operatorname{Re} f > 0$, montrer que f a un (unique) relèvement $\varphi : X \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$. (Indication : avec \ln la détermination principale du logarithme complexe, prendre $\varphi(x) := -\imath \ln f(x)$.)
3. Montrer que tout point de X a un voisinage dans lequel il existe un relèvement. (Indication : adapter la formule de la question précédente.)
4. Soit $X := [0, 1]$. Montrer que, pour j suffisamment grand (dépendant de f), et pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(0) = e^{ia}$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= a - \imath \ln(f(t)/f(0)), \text{ si } 0 \leq t \leq 1/j, \\ \varphi(t) &:= \varphi(1/j) - \imath \ln(f(t)/f(1/j)), \text{ si } 1/j \leq t \leq 2/j, \\ &\vdots \\ \varphi(t) &:= \varphi(k/j) - \imath \ln(f(t)/f(k/j)), \text{ si } k/j \leq t \leq (k+1)/j, \\ &\vdots \end{aligned}$$

(avec $1 \leq k \leq j - 1$) est un relèvement de f .

5. Si $X := \mathcal{C}$ et $f := \text{id}$, montrer que f n'a pas de relèvement. (Indication : supposer le contraire et considérer la fonction $\theta \mapsto \psi(\theta) := \varphi(e^{i\theta})$.)
6. *Bonus.* Soit $X := [0, 1]^2$. Soit $\psi \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(s, 0) = e^{i\psi(s)}$, $\forall s \in [0, 1]$. Montrer que, pour j suffisamment grand (dépendant de f),

$$\begin{aligned}\varphi(s, t) &:= \psi(s) - i \ln(f(s, t)/f(s, 0)), \text{ si } 0 \leq t \leq 1/j \text{ et } 0 \leq s \leq 1, \\ \varphi(s, t) &:= \varphi(s, 1/j) - i \ln(f(s, t)/f(s, 1/j)), \text{ si } 1/j \leq t \leq 2/j \text{ et } 0 \leq s \leq 1, \\ &\vdots \\ \varphi(s, t) &:= \varphi(s, k/j) - i \ln(f(s, t)/f(s, k/j)), \text{ si } k/j \leq t \leq (k+1)/j \text{ et } 0 \leq s \leq 1, \\ &\vdots\end{aligned}$$

(avec $1 \leq k \leq j-1$) est un relèvement de f .

7. *Bonus.* Esquisser une preuve du fait que, si $X = \mathbb{R}^n$, alors f a un relèvement.

Exercice # 22. Soit A une partie connexe d'un espace métrique. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, montrer que B est connexe.

Exercice # 23. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue*.

1. Montrer que l'ensemble

$$A := \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} ; x, y \in I, x \neq y \right\}$$

est un intervalle.

2. En déduire le *théorème de Darboux* : si f est *dérivable*, alors f' a la propriété de la valeur intermédiaire. (Indication : utiliser l'exercice précédent avec $B := f'(I)$.)