

Feuille de TD # 4  
ESPACES DE HILBERT

**Exercice # 1.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $C \subset H$  un convexe fermé non-vide.

Soit  $P_C$  la projection (orthogonale) sur  $C$ , c'est-à-dire  $P_C(x) :=$  l'unique  $y \in C$  tel que  $\|x - y\| = d_C(x)$ .

1. Soient  $x \in H$  et  $y \in C$ . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i)  $y = P_C(x)$ .
- (ii)  $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \forall z \in C$ .

Indication : si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et dérivable, alors 0 est un point de minimum de  $f$  si et seulement si  $f'(0) \geq 0$ . Si cette condition est satisfaite et  $f$  est strictement convexe, alors 0 est le le seul point de minimum de  $f$ . Appliquer ces considérations à

$$[0, 1] \ni t \mapsto f(t) := \|x - [(1 - t)y + tz]\|^2.$$

2. En déduire que  $P_C$  est 1-lipschitzienne, et en particulier continue.  
3. Soit  $C := \overline{B}(0, R)$ . Montrer que

$$P_C(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq R \\ \frac{R}{\|x\|}x, & \text{si } \|x\| > R \end{cases}.$$

4. Si  $F$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ ,  $x \in H$  et  $y \in F$ , montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i)  $y = P_F(x)$ .
- (ii)  $x - y \in F^\perp$ .

En déduire que :

- (a)  $H = F \oplus F^\perp$ .
- (b) Si  $x \in H$  et on écrit  $x = y + w$ , avec  $y \in F$  et  $w \in F^\perp$ , alors  $P_F(x) = y$ .
- (c)  $P_F$  est linéaire et continue, de norme = 1 si  $F$  est non-nul.
- (d) En particulier, si  $F$  est de dimension finie, alors  $P_F$  coïncide avec la projection orthogonale sur  $F$  telle que définie en algèbre linéaire.

De même si  $F^\perp$  est de dimension finie.

**Exercice # 2.** On munit  $\mathcal{B}_{]0,1[}$  de la mesure de Lebesgue  $\lambda_{]0,1[}$ . Soient  $H := L^2(]0, 1[, \mathcal{B}_{]0,1[, \lambda_{]0,1[})$ ,

$$V := \left\{ f \in H ; \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \right\}.$$

1. Montrer que  $V$  est fermé dans  $H$ . Déterminer une base de  $V^\perp$ .
2. Soit  $f(x) = x, \forall x \in ]0, 1[$ . Calculer la projection orthogonale de  $f$  sur  $V$ , puis  $d(f, V)$ .

**Exercice # 3.** Soient  $E$  et  $F$  deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert  $H$ . Montrer que  $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$  et  $(E \cap F)^\perp = E^\perp + F^\perp$ .

**Exercice # 4.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $(H_n)_{n \geq 0}$  des sous-espaces mutuellement orthogonaux de  $H$ .

1. Soit  $x_n \in H_n, \forall n \geq 0$ . Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} x_n$  converge si et seulement si la série

$\sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2$  converge, et dans ce cas

$$\left\| \sum_{n \geq 0} x_n \right\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2.$$

2. Si chaque  $H_n$  est fermé et si  $\sum_{n \geq 0} x_n$  converge, montrer que

$$P_{H_m} \left( \sum_{n \geq 0} x_n \right) = x_m, \forall m \geq 0.$$

**Exercice # 5.** Soient  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $1 \leq p < \infty$ . Soit

$$C := \{f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu); f \geq 0\}.$$

1. Redéfinir proprement  $C$ .
2. Montrer que  $C$  est convexe et fermé.
3. Montrer que, si  $f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ , alors  $g := f \chi_{[f \geq 0]}$  est le seul élément de  $C$  tel que  $\|f - g\|_p = d_C(f)$ .
4. Pour  $p = 2$ , retrouver le résultat de la question précédente en utilisant l'exercice 1, question 1.
5. Que se passe-t-il si  $p = \infty$ ?

**Exercice # 6.** Si  $E, F$  sont des espaces de Banach et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$  est défini par :

$$T^*y'(x) = y'(Tx), \forall y' \in F', \forall x \in E.$$

Si  $H, K$  sont des espaces de Hilbert de produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , respectivement  $(\cdot, \cdot)$ , et  $T \in \mathcal{L}(H, K)$ , alors  $T^* \in \mathcal{L}(K, H)$  est défini par :

$$\langle T^*y, x \rangle = (y, Tx), \forall y \in K, \forall x \in H.$$

Montrer que les deux définitions sont compatibles.

**Exercice # 7.** Calculer  $T^*$  si :

1.  $E$  est une espace de Hilbert,  $F = \mathbb{R}$ ,  $T \in E'$ .
2.  $E = F = H$  (espace de Hilbert),  $T$  est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé  $V$  de  $H$ .
3.  $E = F = \mathbb{K}^n$  muni de la norme  $\| \cdot \|_2$ , et  $T$  est de matrice  $A$  dans une base orthonormée.
4.  $E = F = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ , et  $Tf := hf, \forall f \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ , avec  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée fixée.
5.  $E = L^2(Y, \mathcal{S}, \nu)$ ,  $F = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ , avec  $\mu$  et  $\nu$  mesures  $\sigma$ -finies, et

$$Tf(x) := \int_Y K(x, y) f(y) d\nu(y), \forall f \in L^p(Y, \mathcal{S}, \nu), \text{ pour presque tout } x \in X,$$

où  $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{S}$ -mesurable, dans l'un des cas suivants :

(a)  $K \in L^2(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu)$ .

(b)  $M_1 := \sup_{x \in X} \int_Y |K(x, y)| d\nu(y) < \infty$  et  $M_2 := \sup_{y \in Y} \int_X |K(x, y)| d\mu(x) < \infty$ .

( $K$  est le noyau intégral de  $T$ .)

Que devient ce résultat si  $E = F = \ell^2$ ?

6.  $E = F = \ell^2$ ,  $T(x_0, x_1, \dots) := (0, x_0, x_1, \dots)$ . ( $T$  est le *shift*.)

**Exercice # 8.** Soient  $H, K$  des espaces de Hilbert.  $T \in \mathcal{L}(H, K)$  est une *isométrie partielle* s'il existe  $E \subset H$  un sous-espace fermé tel que  $U := T|_E$  soit une isométrie et  $T|_{E^\perp} = 0$ . Pour un tel  $T$ , calculer  $T^*$  en fonction de  $U$ .

**Exercice # 9.** Soit  $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ . Montrer qu'il existe des réels  $b_{m,n}, \forall m, n \geq 0$ , tels que :

1.  $(b_{m,n})_{m \geq 0} \in \ell^2, \forall n \geq 0$ .

2.  $(b_{m,n})_{n \geq 0} \in \ell^2, \forall m \geq 0$ .

3.  $Tx = \left( \sum_{m \geq 0} b_{m,n} a_m \right)_{n \geq 0}, \forall x = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$ .

Déterminer  $T^*$ .

**Exercice # 10.** Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $(f_n)_{n \geq 0} \subset H$  une suite orthonormée,  $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$  une suite bornée.

1. Montrer que la relation

$$Tx := \sum_{n \geq 0} a_n \langle x, f_n \rangle f_n, \forall x \in H,$$

définit un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H)$ .

2. Calculer  $T^*$ .

**Exercice # 11.** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable. Montrer que toute famille orthonormée  $\mathcal{F} \subset H$  est au plus dénombrable.

Indication : les boules  $B(x, \sqrt{2}/2), x \in \mathcal{F}$ , sont mutuellement disjointes.

**Exercice # 12.** On désigne par  $H$  l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme  $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{iwt} \in \mathbb{C}$ , où  $w$  parcourt  $\mathbb{R}$ .

Soit

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \forall f, g \in H.$$

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $H$ .
2. Vérifier que la famille  $\{e^{iwt}\}_{w \in \mathbb{R}}$  est orthonormée.
3.  $H$  est-il un espace de Hilbert?

**Exercice # 13.** Cet exercice prépare aux questions 3 et 4 de l'exercice suivant. Soient  $1 \leq p \leq \infty$  et  $g \in L^p([0, \infty[, \mathcal{B}_{[0, \infty[}, \lambda_{[0, \infty[})$ .

1. Soit  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ . Montrer que la fonction

$$\mathbb{H} \ni z \mapsto F(z) := \int_0^\infty g(t) e^{-zt} dt \in \mathbb{C}$$

est holomorphe.

2. Soit  $a > 0$ . On suppose que

$$\int_0^\infty t^n g(t) e^{-at} dt = 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{1}$$

- (a) Montrer que

$$\int_0^\infty g(t) e^{-bt} dt = 0, \quad \forall b \in ]0, a].$$

- (b) En déduire que  $F(z) = 0, \forall z \in \mathbb{H}$ .
- (c) En utilisant le fait que la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$  est injective, en déduire que  $g = 0$ .

3. De même, si  $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$  et on remplace (1) par l'hypothèse

$$\int_{\mathbb{R}} t^n g(t) e^{-at^2} dt = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

avec  $a > 0$ , alors  $g = 0$ .

**Exercice # 14. (Bases hilbertiennes de fonctions polynomiales)**

1. Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non-dégénéré et soit  $H$  un espace de Hilbert de (classes d'équivalence de) fonctions sur  $I$  tel que l'espace des fonctions polynomiales sur  $I$  : (i) s'identifie avec  $\mathbb{R}[X]$ , (ii) soit contenu dans  $H$ , et (iii) soit dense dans  $H$ . Si  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est une famille orthonormée de fonctions polynomiales, avec  $\deg P_n = n, \forall n \geq 0$ , montrer que  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est une base hilbertienne de  $H$ .

2. On munit  $I := [-1, 1]$  de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue  $\lambda_{[-1,1]}$ . Soit  $H := L^2([-1, 1], \mathcal{F}_{[-1,1]}, \lambda_{[-1,1]})$ . Les *polynômes de Legendre* sont définis par :

$$P_n(x) := \alpha_n \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad \forall n \geq 0, \forall x \in [-1, 1],$$

où les  $\alpha_n > 0$  sont des constantes telles que  $\|P_n\| = 1, \forall n \geq 0$ .

Montrer que  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est une base hilbertienne de  $H$ .

3. On munit  $I := [0, \infty[$  de la tribu borélienne et de la mesure  $\mu$  de densité  $e^{-x}$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que, dans  $L^2([0, \infty[, \mathcal{F}_{[0, \infty[, \mu])}$ , les *polynômes de Laguerre* :

$$Q_n(x) := \beta_n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad \forall n \geq 0, \forall x \geq 0,$$

(avec  $\beta_n > 0$  constantes convenables) forment une base hilbertienne.

4. On munit  $\mathbb{R}$  de la tribu borélienne et de la mesure  $\nu$  de densité  $e^{-x^2/2}$ . Montrer que, dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \nu)$ , les *polynômes d'Hermite*

$$R_n(x) := (-1)^n \gamma_n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2/2}], \quad \forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

(avec  $\gamma_n > 0$  constantes convenables) forment une base hilbertienne.

**Exercice # 15.** Cet exercice prépare aux questions 3 et 4 de l'exercice suivant.

Soit  $(E_n)_{n \geq 0}$  une suite de sous-espaces de l'espace de Hilbert  $H$  telle que :

- (i)  $E_n$  est de dimension finie,  $\forall n \geq 0$ .
- (ii)  $E_n \subset E_{n+1}, \forall n \geq 0$ .
- (iii)  $E_0 \cup E_1 \cup \dots$  est dense dans  $H$ .

On pose  $E_{-1} := \{0\}$ . Soit  $\mathcal{F}_n$  une base orthonormée de  $E_n \ominus E_{n-1}, n \geq 0$ . Montrer que  $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \dots$  est une base hilbertienne de  $H$ .

**Exercice # 16.** Soit  $H := L^2([0, 1[, \mathcal{F}_{[0,1[, \lambda_{[0,1[}])}$ . Pour  $n \geq 0$ , soit

$$E_n := \{f : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est constante sur } [j/2^n, (j+1)/2^n[, \forall j = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}.$$

1. Montrer que les  $E_n$  vérifient les hypothèses de l'exercice précédent.

Indication pour (iii) : si  $f \in C_c([0, 1])$  et

$$f_n(x) := f(j/2^n), \quad \forall n \geq 0, \forall 0 \leq j \leq 2^n - 1, \forall x \in [j/2^n, (j+1)/2^n[,$$

alors  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur  $[0, 1[$ .

2. Calculer  $\dim E_n, n \geq 0$ .
3. Soit  $E$  la fonction partie entière. Montrer que les fonctions

$$w_I(x) := (-1)^{E(2^{n_1}x)} (-1)^{E(2^{n_2}x)} \dots (-1)^{E(2^{n_k}x)},$$

$$\forall k \geq 0, \forall I = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k\} \subset \mathbb{N}^*$$

(avec la convention  $w_\emptyset = 1$ ), forment une base hilbertienne de  $H$ . C'est la *base de Walsh*.

Indication : si  $n \geq 1$ , montrer que  $\{w_I; \max I = n\}$  est une famille orthonormée contenue dans  $E_n \ominus E_{n-1}$ .

4. Si  $H_0 := 1$  et, pour  $n \geq 0$  et  $0 \leq j \leq 2^n - 1$ ,

$$H_{j+2^n}(x) := \begin{cases} 2^{n/2}, & \text{si } 2j/2^{n+1} \leq x < (2j+1)/2^{n+1} \\ -2^{n/2}, & \text{si } (2j+1)/2^{n+1} \leq x < (2j+2)/2^{n+1}, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer que  $\{H_k\}_{k \geq 0}$  est une base hilbertienne de  $H$ . C'est la *base de Haar*.

**Exercice # 17.** Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto f \otimes g(x, y) := f(x)g(y).$$

Soient  $H := L^2(X, \mathcal{T}, \mu)$  et  $K := L^2(Y, \mathcal{S}, \nu)$ , avec  $\mu, \nu$   $\sigma$ -finies. Si  $H, K$  sont séparables, de bases hilbertiennes  $\{e_m\}_{m \geq 0}$ , respectivement  $\{f_n\}_{n \geq 0}$ , montrer que  $\{e_m \otimes f_n\}_{m, n \geq 0}$  est une base hilbertienne de  $L^2(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu)$ .

Indication : montrer que

$$\|h\|_2^2 = \sum_{m, n \geq 0} \langle h, e_m \otimes f_n \rangle^2, \forall h \in L^2(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu).$$

**Exercice # 18.** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, et soient  $\{e_n\}, \{f_n\}$  deux bases hilbertiennes de  $H$ . Montrer que

$$S := \sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \|T^*f_n\|^2 = \sum_n \|Tf_n\|^2 \in [0, \infty].$$

Si  $H$  est de dimension finie,  $S^{1/2} < \infty$  est la *norme de Frobenius* de  $T$ . Si  $H$  est de dimension infinie,  $S^{1/2} \in [0, \infty]$  est la *norme de Hilbert-Schmidt* de  $T$ .

**Exercice # 19.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(H)$  tel que  $\langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$ . Montrer que  $\text{Id} + T$  est bijectif.

Indication : considérer

$$a(x, y) := \langle x, y \rangle + \langle Tx, y \rangle, \forall x, y \in H.$$

**Exercice # 20.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Montrer que  $\text{Id} + T^*T$  est bijectif.

**Exercice # 21.** On munit  $]0, 1[$  de la tribu borélienne  $\mathcal{T}_{]0, 1[}$  et de la mesure de Lebesgue  $\lambda_{]0, 1[}$ . Soit  $H := L^2(]0, 1[, \mathcal{T}_{]0, 1[, \lambda_{]0, 1[})$ .

1. Si  $f \in H$ , on pose

$$Tf(x) := \int_0^x f(t) dt, \forall x \in [0, 1].$$

Montrer que la définition est correcte et que  $Tf$  est une fonction continue.

2. Montrer que, pour tout  $g \in H$ , il existe un unique  $f \in H$  tel que

$$\int_0^1 f(x)h(x) dx + \int_0^1 Tf(x)Th(x) dx = \int_0^1 g(x)h(x) dx, \forall h \in H.$$