Éléments d'analyse fonctionnelle : Remarques sur le DS 1

Dans ce qui suit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

1 Confusion entre borélienne, intégrable, continue

On dit qu'une fonction $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est

- **mesurable** s'il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_n$ telle que $f_n \to f$ simplement. Ceci est équivalent (Théorème 3.5 p.43) à

$$f^{-1}(\infty) \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{T},\ \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

- **borélienne** si X est un espace métrique et $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne aossicée ;
- **intégrable** si f_+ et f_- sont mesurable et d'intégrale finie.

En particulier, pour montrer qu'une fonction est borélienne, il faut montrer qu'elle est mesurable pour la tribu des boréliens. Ça ne sert à rien (et ce n'est pas correct) de montrer qu'elle est intégrable, car pour être intégrable il faut déjà que l'intégrale de f ait un sens.

Exemple 1 (Fonction non-mesurable). Soit $X = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2, 3\}, X\}$ et μ la mesure définie par $\mu(k) = 1/4$ pour tout $k \in X$. On considère la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0, 1\} \\ 1 & \text{si } x \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Les ensembles $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$. Leurs préimages par f sont données par

$$f^{-1}\{0\} = \{0, 1\} \notin \mathcal{T} \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\{1\} = \{2, 3\} \notin \mathcal{T}.$$

D'après le critère encadré ci-dessus, la fonction f n'est donc pas mesurable.

Remarque 1. En revanche, la fonction g telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = g(2) = g(3) = 1$ est mesurable.

Exemple 2 (Fonction borélienne non intégrable). Soit $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ telle que $f(x) = +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f^{-1}(\infty) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad f^{-1}(-\infty) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad f^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Donc f est mesurable pour la tribu des boréliens, donc borélienne. En revanche $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = +\infty$ donc f n'est pas intégrable.

Exemple 3 (Fonction intégrable non-bornée). Soit $(X, \mathcal{T}, \mu) = (]0, 1], \mathcal{B}_{]0,1]}, \lambda)$. Soit $f :]0, 1] \to \bar{\mathbb{R}}$ telle que $f(x) = 1/\sqrt{x}$ pour tout $x \neq 0$. La fonction f est continue sur $]0, 1]$ donc borélienne. Elle est intégrable (d'après le critère de Riemann) c'est-à-dire que $\int_{]0,1]} f(x) d\lambda(x) < +\infty$. Et pourtant $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, donc f n'est pas bornée.

Ainsi, une fonction qui est **dans $\mathcal{L}^p$ n'est pas nécessairement bornée**.

Exemple 4 (Intégrable n'implique pas continue). Soit $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ et posons $f := \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Comme $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ la fonction f est nulle presque partout, donc pour tout $1 \leqslant p < +\infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda = \lambda(\mathbb{Q})^p = 0 \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = 0.$$

Donc $f \in \mathcal{L}^p$ pour tout $p \in [1, +\infty]$. Cependant, f n'est continue nulle part.

Ainsi, une fontion peut tout à fait être dans $\mathcal{L}^p$ sans être continue.

2 Confusion dans les convergences

Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Il existe **différents type de convergence** possibles pour la suite $(f_n)_n$. On dit que

— $f_n \to f$ **simplement** (ou presque partout) si p.p. $x \in X$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

— $f_n \to f$ **dans** L^p (ou dans $\mathcal{L}^p$, ou pour la norme $\|\cdot\|_p$) si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

— $f_n \to f$ uniformément si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{+\infty} = 0$.

Exemple 5 (convergence simple et L^p). Soit $(f_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de fonctions $f_n[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ -n^2 x + 2n & \text{si} 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{si} 2/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

La fonction f_n est intégrable pour tout $n \geqslant 2$ et la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$. Mais $\|f_n - f\|_1 = \|f_n\|_1 = 1$. Donc f_n ne converge pas vers f dans L^1.

Ainsi, la convergence simple n'implique pas la convergence dans L^p.
Pour que cela soit vrai il faut rajouter une hypothèse de domination
sur les fonctions f_n (cf. Théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Exemple 6 (Convergence uniforme et L^p). Soit $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ et $f : x \mapsto x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x + 1/n$ On a

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad |f(x) - f_n(x)| = |x - x - 1/n| = 1/n,$$
$$\Rightarrow \|f - f_n\|_\infty = \operatorname{supess}_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| = 1/n \to_{n\infty} 0.$$

Donc f_n converge uniformément vers f (donc simplement). En revanche soit $p < +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^p \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1/n^p \, d\lambda(x) = 1/n^p \mu(\mathbb{R}) = +\infty.$$

Donc f_n ne converge pas vers f dans L^p.

La convergence uniforme implique la convergence simple,
mais n'implique pas en général la convergence dans L^p.

3 Convolution

Le cours vous dit que

— si p et q sont conjugués et si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$, alors $f * g$ est continue.

— Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{C}_c^0$ alors $f * g$ est continue.

Ce n'est plus nécessairement vrai si p et q ne sont pas conjugués et g n'est pas continue.

Exemple 7 (Convolée discontinue). Soit

$$f(x) := \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $f \in \mathcal{L}^1$ et f est discontinue en 0 et 1.
Montrons que la convolution de f avec elle-même est discontinue en zéro. En effet, on a $f * f(x) = 0$ pour tout x tel que $-\infty < x \leqslant 0$, de plus si $0 < x \leqslant 1$:

$$f * f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y(x-y)}} \mathrm{d}y = \left[2 \arcsin\left(\sqrt{y/x}\right)\right]_0^x = 2 \arcsin(1) = \pi.$$

Donc $f * f$ est discontinue en zéro.

Il existe des fonctions f et g pour lesquelles $f * g$ n'est pas continue.

4 Erreur de raisonnements logiques

Nous avons vu que si $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré de mesure *fine*, alors pour tout $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, on a $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ pour tout f mesurable. Donc ceci **implique** que $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$.

En revanche si vous partez du fait que $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$ ceci ne vous **donne pas** l'inégalité sur les normes. Le fait que $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$ vous donne juste que si $\|f\|_q < +\infty$ alors $\|f\|_p < +\infty$. Attention donc aux erreurs de logiques dans votre rédaction.

5 Autres remarques

1. On rappelle que $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$. Ainsi

$$\|f * g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x.$$

   Il y a donc *deux* intégrales – une par rapport à x et une par rapport à y – dans le calcul de la norme p de $f * g$.

2. **La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en zéro**. On ne peut donc pas utiliser le fait que sa dérivée est croissante, ni que sa dérivée seconde est positive, pour dire qu'elle est convexe.

3. Le théorème de Tonelli s'applique à des fonctions mesurables positives, tandis que le théorème de Fubini (ou Fubini-Tonelli) requiert que la fonction soit *intégrable*. Attention donc à bien choisir le théorème à appliquer en fonction de vos hypothèses.