UCBL 2015/2016 - Semestre de printemps - UE fonctions de variables complexes

1 Séries entières

Exercice 1. Calculer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\text{a)} \sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n \quad \text{b)} \sum_{n\geq 0} n! z^n \quad \text{c)} \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$
$$\text{d)} \sum_{n\geq 0} n! z^{n^2} \quad \text{e)} \sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!}.$$

Montrer que la série c) converge pour tout z tel que $z \neq \frac{1}{4}$ et $|z| = \frac{1}{4}$.
Indication : on rappelle l'équivalent de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Exercice 2. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) Montrer que si $|z| < 1$, la série $S(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$ converge absolument.

b) Montrer que, pour $z = 1$, la série dérivée de S diverge. En déduire le rayon de convergence de S.

c) Montrer, sur cet exemple, qu'une série entière et sa série dérivée n'ont pas le même comportement sur le bord du disque de convergence.

Exercice 3.

1. Trouver le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où $a_{2n+1} = a^{2n+1}$ et $a_{2n} = b^{2n}$ avec $0 < a, b$.

2. Pour la série $\sum a_n z^n$, où $a_{2n} = a^n b^n$ et $a_{2n+1} = a^n b^{n+1}$ avec $a, b > 0$, comparer l'inverse du rayon, R^{-1}, avec $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Exercice 4. Calculer le rayon de convergence des séries suivantes et étudier la convergence de la série sur le bord du disque de convergence :

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n\sqrt{n}} \quad \text{b)} \sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{n(\ln n)^2} \quad \text{c)} \sum_{n\geq 1} \frac{e^{i\pi n^2/2}}{n} z^n.$$

Exercice 5.

a) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$. Montrer que si la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge alors la série de fonctions $z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$ du plan complexe.

b) **Application :** on veut montrer que

$$\log 2 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}. \tag{1}$$

   (*i*) Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 et que pour tout $t \in]-1, 1[$, $\log(1+t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$.

   (*ii*) En utilisant a), en déduire la formule (1).

Exercice 6.

1. Montrer que la fonction $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est continue sur le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$.

2. Peut-on prolonger la fonction réelle $x \mapsto f(x)$, définie sur $[-1, 1]$, par une fonction dérivable au voisinage de 1 ? Et de -1 ?

1.1 Développement en série entière

Exercice 7. Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes (on précisera le rayon de convergence) :

a) $g(z) = \frac{2}{(1+z)^3}$.

b) $\frac{1}{1+z+z^2}$.

c) $\frac{z \sin a}{z^2 - 2(\cos a)z + 1}$ (où $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 8.
1. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$. Calculer sa somme f dans son disque de convergence. Donner le développement en série de f au point $z = -1/4$ et le rayon de convergence de cette série.

2. De même, on considère la série entière $S(z) = \sum_{n\geq 0} n z^n$. Calculer le rayon de convergence de cette série entière et expliciter $S(z)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

1.2 Théorème de Liouville et formule de Parseval

Exercice 10. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $|z| < R$, on pose $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

a) On fixe $r \in]0, R[$. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

b) Pour $r \in]0, R[$, on pose $M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Justifier que $M(r) < +\infty$ et que, pour tout $n \geq 0$, on a $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

c) On suppose que $R = +\infty$. Montrer que s'il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que : $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. Comme cas particulier, en déduire le **théorème de Liouville** : toute fonction entière et bornée est constante.

d) On revient au cas général. Établir la **formule de Parseval**:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}, \quad (r \in [0, R[).$$

e) On suppose que f se prolonge en une fonction continue $\widetilde{f}$ sur le disque fermé $D(0, R]$.

e.i) Soit $\varphi : [0, R] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widetilde{f}(re^{i\theta})|^2\, d\theta$.
Montrer que φ est continue sur $[0, R]$.

e.ii) En déduire que la formule de Parseval reste valable en remplaçant f par $\widetilde{f}$ et r par R.

2 Formes différentielles d'ordre 1

Exercice 11. Un corps punctiforme se déplace le long de la droite d'équation $y = 2x$, du point $P_1 = (1, 2)$ au point $P_2 = (2, 4)$ dans le champ de forces $F = (xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2})$. Calculer le travail effectué par ce champ de forces.

Exercice 12. Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par l'astroïde, donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)^3 \\ y(t) = \sin(t)^3, \qquad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

On pourra utiliser la formule de Green–Riemann.

Exercice 13. On considère la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ définie par $\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$. Démontrer que ω est fermée. Calculer l'intégrale de ω le long du cercle centré en 0 et de rayon 1 parcouru dans le sens positif. La forme ω est-elle exacte dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$? Et dans $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^-$?

Exercice 14. Vérifier si la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x, y) = ye^x\, dx + (e^x - \cos y)\, dy$$

est exacte et si c'est le cas calculer une primitive.

Exercice 15. En utilisant la théorie des formes différentielles, construire une solution locale $y = y(x)$ au voisinage de 1 du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \frac{x+\cos y}{x \sin y} \\ y(1) = \pi/2. \end{cases}$$

Indication : chercher une primitive $F(x, y)$ de la forme différentielle exacte $(x + \cos y)\, dx - x \sin y\, dy$ s'annulant en $(1, \pi/2)$. Appliquer à $F(x, y)$ le théorème des fonctions implicites et construire $y = y(x)$ telle que $F(x, y(x)) = 0$.

Exercice 16. En utilisant la théorie des formes différentielles, construire une solution locale $y = y(x)$ au voisinage de 1 du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = -\frac{y(x+y+1)}{2y+x} \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Indication : multiplier numérateur et dénominateur par le "facteur intégrant" $\phi(x, y) = e^x$. La forme différentielle associée au problème de Cauchy devient alors exacte et l'on peut appliquer la méthode de l'exercice précédente. (Si le "facteur intégrant" n'est pas donné, on peut parfois en trouver un en cherchant parmi les fonctions de la forme $\phi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$).

3 Holomorphie et conditions de Cauchy–Riemann

Exercice 17. Pour tout complexe $z = x + iy$ (avec x, y réels) on pose

$$e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \ .$$

(a) Montrer qu'on a $e^0 = 1$ et $e^z.e^{z'} = e^{z+z'}$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$. Donner le module et un argument de e^z en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

(b) Montrer que la fonction $\exp\colon z \mapsto e^z$ est périodique de période $2\pi i$, qu'elle est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ et que la restriction de exp à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \colon 0 < \mathfrak{Im} z < 2\pi\}$ est injective.

(c) Montrer que la fonction exp est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Quelle est sa dérivée?

(d) Soit $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction non nulle vérifiant $f(z+z') = f(z)f(z')$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$. On suppose de plus que f est dérivable en 0. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, puis donner une relation entre f' et f. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = e^{cz}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

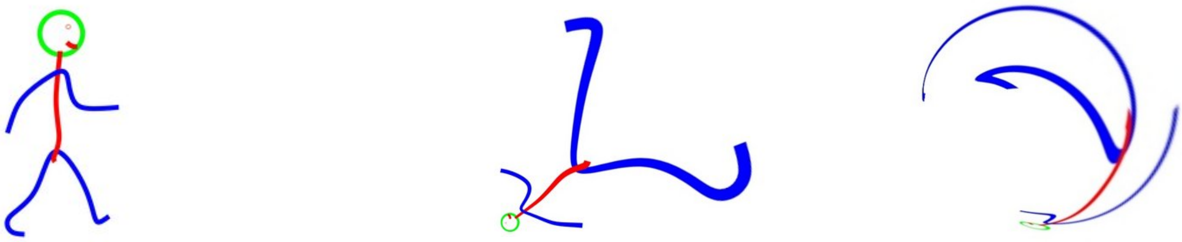

Figure 1: Illustration de l'exercice 19. À gauche : image originale. Au centre : transformation conforme (les conditions de l'exercice 19 sont remplies). À droite : transformation non conforme. (Crédit images : Ch. Mercat, `http://images.math.cnrs.fr/Applications-conformes.html`).

Exercice 18. Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ de la façon usuelle; pour deux complexes $z_0 = a_0 + ib_0$ et $z_1 = a_1 + ib_1$, la notation $\langle z_0, z_1\rangle$ désigne le réel $a_0a_1 + b_0b_1$ (le produit scalaire de z_0 et z_1 vus comme vecteurs du plan).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ écrit dans la base canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) dét $A \geqslant 0$ et il existe $k > 0$ tel que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ on a : $\langle Au, Av\rangle = k^2\langle u, v\rangle$;

(ii) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $k > 0$ tels que
$$A = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix} ;$$

(iii) il existe $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, tel que pour tout $u \in \mathbb{C}$ on a : $Au = wu$;

(iv) A préserve les angles orientés (dans ces conditions on dit que A est une *similitude directe*).

Rappelons que si z_1, z_2 sont deux éléments de $\mathbb{C}^*$, on appelle *angle orienté* entre les vecteurs z_1, z_2 l'unique réel $\alpha \in [-\pi, \pi[$ tel que :
$$\frac{z_2}{|z_2|} = e^{i\alpha}\frac{z_1}{|z_1|} .$$

Exercice 19. 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application différentiable. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est dérivable au sens complexe dans U et $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.

(b) Pour tout $u \in U$, Df_u est de la forme k_uA_u où $k_u \in]0, +\infty[$ et A_u est une rotation de $\mathbb{R}^2$.

(c) Pour tout $u \in U$, $Jacf_u > 0$ et Df_u conserve l'angle orienté de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

4 Conditions de Cauchy–Riemann

Exercice 20. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ où la fonction est différentiable (comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$), l'ensemble des points où elle est dérivable, et l'ensemble des points où elle est holomorphe.

1. $z \mapsto \overline{z}$.

2. $z \mapsto z\overline{z}$.

3. $z \mapsto \mathfrak{Re}(z)$.
4. $z \mapsto \mathfrak{Im}(z)$.

Exercice 21. 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x+iy) = x + 2ixy$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?

2. Soit $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par $g(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$. La fonction g est-elle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Déterminer les ensembles des points de $\mathbb{C}$ où

a) f est holomorphe ;

b) f est différentiable (comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) ;

c) f admet des dérivées partielles et où les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & \text{si } x+iy \neq 0, \\ 0 & \text{si } x+iy = 0. \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas différentiable en 0, mais possède des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann en 0.

Exercice 24. Soit $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction g définie par $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est dérivable en $\overline{z_0}$, et calculer $g'(\overline{z_0})$.

Exercice 25. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On note $P = \mathfrak{Re}(f)$ et $Q = \mathfrak{Im}(f)$ les parties réelle et imaginaire de f.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est constante sur U.
   (b) P est constante sur U.
   (c) Q est constante sur U.
2. En déduire que les assertions précédentes sont aussi équivalentes à :
   (d) $\overline{f}$ holomorphe sur U.
   (e) $|f|$ est constante sur U.
   (f) $|f|$ est holomorphe sur U.

Exercice 26. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soient f et g des fonctions holomorphes sur U telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in U$.

Exercice 27. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soient f et g des fonctions holomorphes sur U telles que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. On suppose aussi que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = cg(z)$ pour tout $z \in U$.

Exercice 28. Soit $f : U \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $P = \mathfrak{Re}(f)$ et $Q = \mathfrak{Im}(f)$ les parties réelle et imaginaire de f.

a) Montrer que s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, tel que $aP + bQ = c$ alors f est constante sur U.

b) Soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable telle que $\forall z \in f(U)$, on ait $D\Psi_z \neq 0$.

   i) Montrer que s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in U$, $\Psi(P(x,y), Q(x,y)) = k$, alors f est constante sur U.

   ii) Quelles sont les fonctions holomorphes sur U dont l'image est incluse dans une droite du plan ? ; un cercle du plan ?

Exercice 29. Soit $f : U \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $P = \mathfrak{Re}(f)$ et $Q = \mathfrak{Im}(f)$ les parties réelle et imaginaire de f.

1. Caractériser les fonctions $Q_1 : U \to \mathbb{R}$ telles que $P + iQ_1$ est holomorphe sur U.

2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphes telles que

   (a) $P(x,y) = -ye^x \cos y - xe^x \sin y$.

   (b) $Q(x,y) = \operatorname{sh}(y)\sin(x)$.

Exercice 30. 1. Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 holomorphe. Démontrer que les parties réelles et imaginaire de f sont des fonctions harmoniques dans U (c'est-à-dire les solutions de classe C^2 de l'équation $\Delta u = 0$).

2. Soit p une fonction harmonique sur le rectangle $U =]a,b[\times]c,d[$. Démontrer qu'il existe une fonction harmonique q sur U telle que $f = p + iq$ est holomorphe sur U.

3. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Donner une condition nécéssaire et suffisante portant sur a,b,c pour qu'il existe f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\mathfrak{Re}(f) = P$.

Exercice 31. On note $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$ et $\bar\partial f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$.

1. Démontrer que f est dérivable au sens complexe si et seulement si elle est différentiable et $\bar\partial f = 0$.

2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction polynômiale en x,y. On suppose que f est holomorphe au voisinage de 0; montrer qu'alors f est un polynôme en $z = x + iy$.
   (*Indication :* écrire f sous la forme $\sum_{h,k} a_{h,k} z^h \bar z^k$, où la somme est finie, et appliquer $\bar\partial$).

Exercice 32. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas l'origine et $F\colon U \to \mathbb{C}$ une application différentiable dans U au sens réel. On exprime F en coordonnées polaires par $(\tilde P + i\tilde Q)(r,\theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$, où $\tilde P$ et $\tilde Q$ sont à valeurs réelles. Exprimer la condition $\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F}{\partial x}$ à l'aide de $\tilde P$ et $\tilde Q$. En déduire la version polaire des équations de Cauchy–Riemann :

$$\frac{\partial \tilde P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde Q}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial \tilde Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde P}{\partial \theta}.$$

Applications :

1. Soit U le demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$ défini par la condition $\mathfrak{Im}(z) > 0$. Montrer que l'application qu'à $z \in U$ associe la racine carrée complexe de z dans U est holomorphe.

2. Soit $U = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ et $\operatorname{Log}\colon U \to \mathbb{C}$ la détermination principale du logarithme, c'est à dire la fonction qu'à $z \in U$ associe w, où $\exp(w) = z$ et $\mathfrak{Im}(w) \in]-\pi,\pi[$. Démontrer que Log est holomorphe dans U.

5 Fonctions circulaires et hyperboliques

Exercice 33.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos(iz) = \cosh(z) \ ; \quad \cosh(iz) = \cos(z) \ ; \quad \sin(iz) = i\sinh(z) \ ; \quad \sinh(iz) = i\sin(z)$$

En déduire les parties réelles et imaginaires des fonctions cos, sin, cosh et sinh. Les fonctions cos et sin sont-elles bornées sur $\mathbb{C}$?

b) Trouver les zéros des quatre fonctions cos, sin, cosh et sinh.

c) Donner le développement en série entière de cos, sin, cosh et sinh.

d) Résoudre les équations :

$$(i) \quad \sin(z) = \frac{5}{3} \ ; \quad (ii) \quad \cosh(z) = \frac{1}{2} \ ; \quad (iii) \quad \cos(z) = 2 \ ; \quad (iv) \quad \sin z = \cosh 4 \ .$$

Exercice 34. Soit $f : z \mapsto \sin(z)$ et $g : z \mapsto \cos(z)$.

1. Trouver l'image par f de la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.
2. Trouver l'image par f de la droite d'équation $x = a$ où $0 < a < \frac{\pi}{2}$.
3. Trouver l'image par f du segment $\{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; y = 0\}$.
4. Trouver l'image par g du segment $\{0 < x < \pi; y = a\}$ avec $a > 0$.

Exercice 35.

a) Quels sont les domaines de définition de tan et de tanh? Montrer que tan est π-périodique et que tanh est $i\pi$-périodique.

b) Montrer que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ et que $1 + \tan^2(z) = \dfrac{1}{\cos^2(z)}$ pour $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

c) Montrer que $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ et que $1 - \tanh^2(z) = \dfrac{1}{\cosh^2(z)}$ pour $z \neq i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

6 Le logarithme complexe

Exercice 36. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et Log la détermination principale du logarithme.

1. A t-on $\mathrm{Log}(e^z) = z$ pour tout $z \in (\exp)^{-1}(U)$? Sinon, déterminer un ouvert V de $\mathbb{C}$ où cette égalité est vraie.
2. Soit $P^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 0\}$. A t-on $\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z')$ pour tous $z, z' \in P^+$?
3. Même question en remplaçant P^+ par $\pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) > 0\}$.
4. Pour $z \in U$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $z^{(\alpha)} = e^{\alpha \,\mathrm{Log}(z)}$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in U$ on a $z^{(n)} = z^n$.
5. On pose $z = e^{3i\pi/4}$. Comparer $(z^{(2)})^{(i)}$, $z^{(2i)}$ et $(z^{(i)})^{(2)}$.

Exercice 37. Soit U un ouvert, $F\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que $f \overset{\text{déf}}{=} e^F$ est holomorphe dans U. Démontrer qu'alors F est holomorphe dans U.
(Autrement dit : *toute détermination continue du logarithme d'une fonction holomorphe est holomorphe*).

Exercice 38. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur U.

1. Soit F une fonction holomorphe U dans C. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

   (a) F est une détermination sur U du logarithme de f, i.e

   $$\forall z \in U \quad e^{F(z)} = f(z)$$

   (b) $F'(u) = \frac{f'(u)}{f(u)}$ pour tout $u \in U$ et il existe $u_0 \in U$ tel que $e^{F(u_0)} = f(u_0)$.

2. Soient F et G deux déterminations du logarithme de f dans U. Comparer F et G.

3. Exprimer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$ à l'aide de la détermination principale du logarithme.

4. Soit F une détermination du logarithme sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}^*$. Montrer que F est analytique sur U (on montrera que pour tout a dans U on a $F(z) = F(a) - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1 - \frac{z}{a})^n$ sur un voisinage de a).

Exercice 39. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente toute fonction holomorphe f sur U, à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $\tan(f(z)) = z$, $(z \in U)$.

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente, alors $-i \notin U$ et $i \notin U$.

2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) f est une détermination holomorphe de la fonction arctangente sur U,

   (ii) $2if(z)$ est une détermination holomorphe sur U du logarithme de $\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

3. Soit U un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Supposons qu'il existe sur U une détermination holomorphe de la fonction arctangente. Expliciter toutes les déterminations holomorphes sur U de la fonction arctangente.

4. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\}$.

   a) Construire sur U une détermination holomorphe f de la fonction arctangente.

   b) Déterminer $f(U)$.

   c) Donner pour $|z| < 1$, le développement en série entière de f.

6.1 Les fonctions puissances non entières

Exercice 40 (Racines carrées d'une fonction holomorphe)**.** Notons U le plan complexe privé des deux demi-droites $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ de l'axe réel.

a) Montrer que l'image de U par la fonction $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2 - 1$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

b) On note Log une détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $f\colon U \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z^2-1)}$ est bien définie et holomorphe sur U. Calculer son carré et sa dérivée.

c) Notons V le plan complexe privé du segment $[-1, 1]$. Vérifier que pour $z \in V$, on a $z^{-1} \in U$. On définit $g\colon V \to \mathbb{C}$ en posant $g(z) = izf(z^{-1})$. Montrer que g est bien définie et holomorphe sur V. Calculer son carré et sa dérivée.

Exercice 41 (Racines p-ièmes)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et p un entier, $p \geq 2$. On appelle détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f\colon U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$ on ait $(f(z))^p = z$.

a) Montrer que s'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur U, alors il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.

b) Soit f une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer que pour tout $z \in U$ on a $f(z) \neq 0$. En déduire que $0 \notin U$.

c) On suppose U connexe et on note f_1, f_2 deux déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.

d) En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U, alors il en existe exactement p distinctes. Quelles sont-elles ?

e) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ telle que$f(1) = e^{4i\pi/3}$. Calculer $f(i)$ et déterminer $f(U)$.

Exercice 42. Soit $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_j = \arg(a_j) \in [-\pi, \pi[$, $L_j = \{re^{i\alpha_j} : r \geq |a_j|\}$ et $U = \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^m L_j$.

1. Montrer qu'il existe f holomorphe sur U telle que $f(z)^2 = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$ pour tout $z \in U$.
2. Soit $U = \mathbb{C} \setminus (]-\infty - 1] \cup [1, +\infty[)$. En utilisant la question 1., retrouver le résultat de l'exercice 40, à savoir qu'il existe sur U une détermination holomorphe de $(z^2 - 1)^{1/2}$.
3. Même question en remplaçant U par $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

7 Intégration le long de chemins

Exercice 43. Soit γ le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer

$$\int_\gamma \overline{z} dz.$$

Exercice 44. Soit γ le circuit dont le support est le carré de sommets $1+i$, $1-i$, $-1-i$ et $-1+i$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_\gamma \frac{z-1}{z} dz.$$

Exercice 45. Soit γ le cercle unité parcouru dans le sens direct, et soit f une fonction continue définie sur le support de γ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\overline{\int_\gamma f(z) dz} = -\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z^2} dz.$$

Exercice 46. (Lemmes de Jordan) On fixe $r_0 \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$ avec $\alpha_1 < \alpha_2$.

1. Soit $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. Soit $f : \Delta_1 \to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ et soit $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$. Montrer que
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

2. Soit $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. Soit $g : \Delta_2 \to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{z\to 0} zg(z) = 0$ et soit $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$. Montrer que
$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0.$$

3. Soit $f\colon \{z\colon \mathfrak{Im} z \geq 0\} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\lim_{|z|\to\infty,\, \mathfrak{Im} z\geq 0} f(z) = 0$. Soit $\Gamma_r\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$, paramétrée par $t \mapsto re^{it}$. Démontrer que
$$\forall a > 0, \quad \lim_{r\to+\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)e^{iaz}\, dz = 0.$$

Exercice 47. En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Ree}(z) \geq 0$ on a :
$$\left|e^{bz} - e^{az}\right| \leq (b-a)|z|e^{b\mathfrak{Ree}(z)}.$$

7.1 Primitives

Exercice 48. Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\int_\gamma \frac{z+1}{z} dz$ sans expliciter l'intégrale curviligne.

Exercice 49. On fixe $a \in]0,1[$ et $r \in]0, 1-a[$. Soit γ le cercle de centre a et de rayon r. Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$, on définit g par $g(z) = 2\frac{z-a}{z^2-1}$. Soit $\Gamma = g \circ \gamma$.

1. Montrer que Γ est un circuit tracé dans $\mathbb{C}^*$.
2. Calculer $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$.

Exercice 50. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz\, (n \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2} dz$$

Exercice 51. 1. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{i^n z^{n-1}}{n!}$. Montrer que f est entière et calculer $f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. Soit $r > 0$. En utilisant le circuit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par
$$\gamma(t) = \begin{cases} re^{2i\pi t}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (4t-3)r, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$
montrer que :
$$\int_{-r}^{r} f(x)dx - i\pi = -i\int_0^\pi \exp(ire^{ix})dx.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale généralisée
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

7.2 Indice, théorème de Goursat

Exercice 52. Soit γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$. En calculant de deux manières différentes $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, donner la valeur de
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Exercice 53. Construire un lacet γ tel que la fonction "indice", $\mathrm{Ind}(\gamma,\cdot)\colon \mathbb{C}\setminus \mathrm{supp}(\gamma) \to \mathbb{Z}$, prend exactement les valeurs $0, -1, 2$.

Peut-on construire un lacet tel que γ tel que la fonction "indice", $\mathrm{Ind}(\gamma,\cdot)\colon \mathbb{C}\setminus \mathrm{supp}(\gamma) \to \mathbb{Z}$, est surjective ?

Exercice 54. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq 1$. Montrer que l'application $t \longmapsto \frac{1}{1-2\alpha\cos t + \alpha^2}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

2. Pour $|\alpha| \neq 1$, soit$f(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$. En considérant l'intégrale curviligne d'une fonction bien choisie le long du cercle unité, calculer $f(\alpha)$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1\}$?

Exercice 55. Soit U un domaine et f une fonction holomorphe sur U telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.

1. Montrer que pour tout circuit γ tracé dans U on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \in \mathbb{Z}.$$

2. Démontrer qu'il existe une détermination holomorphe dans U du logarithme de f si et seulement si l'intégrale précédente s'annule pour tout lacet γ tracé dans U.

3. Démontrer que si la condition précédente est remplie, alors pour tout entier $n \geq 2$ il existe dans U une détermination holomorphe de la racine n-ième de f.

4. Que peut-on dire de plus si U est simplement connexe ?

Exercice 56 (Un contrexemple à la réciproque de la question **55**.3)**.**

1. Soit $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Montrer qu'il n'existe pas dans V de détermination holomorphe du logarithme de $z \mapsto z^2 - 1$.

2. Montrer qu'il existe une détermination holomorphe dans V de la racine carrée de $z \mapsto z^2 - 1$. (*Indication :* Poser $g(z) = iz\exp\big(\frac{1}{2}L(\frac{1}{z^2} - 1)\big)$, où $L\colon \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme).

Exercice 57. Soit $U = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$.

1. Soit γ un circuit tracé dans U. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = 0.$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction f holomorphe sur U telle que $f'(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z \in U$ et $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$.

3. Existe-t-il une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ dans $D(0, 1[$? Et dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$?

8 Formules de Cauchy

Exercice 58. Calculer pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $R > 0$, $R \neq |a|$, l'intégrale

$$I = \int_{\gamma_R} \frac{e^{z^2}}{z^3 - a^3}\, dz\,,$$

où γ_R est le cercle de centre 0 et de rayon R.

Exercice 59. Soit f une fonction entière telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$|f(z)| \leq \sqrt{|z|}\,.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 60. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé $\overline{D} = D(0, 1]$. On note γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens positif.

a) Montrer qu'il existe $r > 1$ tel que $\operatorname{supp}\gamma \subset D(0, r[\subset U$.

b) Soit f holomorphe sur U.

(*i*) En calculant de deux manières différentes l'intégrale curviligne suivante

$$I := \int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz,$$

donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

(*ii*) On fixe $a \in \mathbb{C}^*$, $|a| \neq 1$. Calculer

$$I(a) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\, dz.$$

Exercice 61. Soient $R > 0$, f une fonction holomorphe sur $D(0, R[$ et continue sur $D(0, R]$. On note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens positif. Montrer que, pour tout $z \in D(0, R[$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(u)}{u-z}\, du\,.$$

Exercice 62. Soit $R \geq 1$ et $f : D(0, R[\to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $D(0, R[$. On suppose que, pour tout $z \in D(0, 1[$, on a

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}\,.$$

Montrer que $\forall n \geq 0$:

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)\,.$$

9 Analyticité des fonctions holomorphes

Exercice 63. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{2ik\pi \colon k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est analytique en 0. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la série de Taylor de f à l'origine. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

b) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $n \geq 0$, on ait

$$|a_n| \leq \frac{M}{2^n}.$$

Exercice 64. On fixe $\omega \in \mathbb{C}^*$ et on considère $g : z \longmapsto g(z) = \dfrac{1}{1 - 2\omega z + z^2}$.

a) Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 et une fonction f holomorphe sur V telle que

$$f(z)^2 = g(z),\ \forall z \in V \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

b) Montrer qu'il existe un disque ouvert D centré en 0 et $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes de degré n telle que

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n\geq 0} P_n(\omega) z^n.$$

10 Zéros des fonctions holomorphes

Exercice 65. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.

1. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que $f(z)g(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que f ou g est identiquement nulle.

2. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose qu'il existe deux déterminations holomorphes de la racine carrée de f, notées g_1 et g_2. Retrouver le fait que $g_1 = g_2$ ou $g_1 = -g_2$.

Exercice 66. Etudier l'existence et l'unicité de fonctions holomorphes f sur un voisinage connexe U de 0 telles que :
a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n+1}$, $\forall n \geq 1$. b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \exp(-n)$, $\forall n \geq 1$.

Exercice 67. Déterminer l'ensemble Z des zéros de la fonction $z \mapsto 1 - \exp(\frac{z}{z-1})$ dans le disque ouvert $D(0,1[$. Quels sont les points d'accumulation de Z dans $\mathbb{C}$? Et dans $D(0,1)$?

Exercice 68. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U qui converge vers $a \in U$ sans jamais prendre cette valeur. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n)\,.$$

Montrer que si $g(a) \neq 0$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f = cg$.

Exercice 69. Soient f et g deux fonctions entières telles que :

$$|f(z)| \leq |g(z)|\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

a) Montrer que tout zéro z_0 de g est un zéro de f et que la multiplicité de f au point z_0 est au moins aussi grande que celle de g.

b) En déduire que f et g sont proportionnelles.

Exercice 70. On fixe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $a = e^{2i\pi t}$ et on note

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\}.$$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U telle que $f(az) = f(z)$, $\forall z \in U$. Enfin on définit $g : U \to \mathbb{C}$ par $g(z) = zf'(z) - f'(1)$, $z \in U$.

a) Calculer $g(a^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que g est identiquement nulle sur U.

c) Montrer que f est constante.

d) La conclusion subsiste-t-elle si on prend $t \in \mathbb{Q}$?

Exercice 71. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

2. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 72. Soit f une fonction entière.

1. On pose $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Montrer que g est une fonction entière.

2. On suppose qu'il existe une suite (a_n) de réels distincts tendant vers 0 et telle que la suite $f(a_n)$ soit une suite de réels. Montrer qu'alors $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

3. On suppose en plus que la suite (a_n) de la question précédente est strictement décroissante et que pour tout entier n on a $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$. Montrer que f est constante.

4. Le résultat de la question précédente est-il encore valable si la suite (a_n) n'est pas strictement décroissante?

Exercice 73. Soit f une fonction entière vérifiant

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ f^{(n)}(z) = 0\ .$$

Montrer que f est un polynôme.

11 Principe du maximum

Exercice 74. 1. Soit f une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$, holomorphe sur $D(0,1)$, nulle sur le cercle de rayon 1. Montrer que f est identiquement nulle.

2. Plus fort: on ne suppose plus que $f(e^{i\theta})$ est nulle pour tout θ mais seulement pour $0 \le \theta \le \pi$. Montrer que f est identiquement nulle. *Indication :* $f(z)f(-z)$.

Exercice 75. Soit $\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Montrer: $\forall\theta \in \mathbb{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire $|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$.

Exercice 76. Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \le \frac{1}{n}$ pour $|z| = n$, $n \ge 1$. Montrer que F est identiquement nulle.

Exercice 77. 1. Soit f analytique sur un disque $|z - z_0| \le R$ et telle qu'il existe un certain z_1 avec $|z_1 - z_0| < R$ tel que $|f(z)| > |f(z_1)|$ pour $|z - z_0| = R$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans le disque ouvert $D(z_0, R)$. *Indication :* considérer sinon ce que dit le principe du maximum pour la fonction $\frac{1}{f}$.

2. *Théorème de Hurwitz.* Soit f_n des fonctions holomorphes sur un voisinage commun U de $\overline{D(0,1)}$ qui convergent uniformément sur U. Soit F la fonction limite. On suppose que F n'a aucun zéro sur le cercle $|z| = 1$, et qu'elle a au moins un zéro dans le disque ouvert $D(0,1)$. Montrer en appliquant la question précédente à f_n que pour $n \gg 1$ la fonction f_n a au moins un zéro dans $D(0,1)$. Ce résultat est souvent appliqué sous sa forme réciproque: *si des fonctions holomorphes f_n sans zéro convergent uniformément sur un ouvert connexe vers F alors soit F est identiquement nulle soit F n'a aucun zéro.* Justifier cette dernière reformulation.

12 Singularités des fonctions holomorphes

Exercice 78.

1. Trouver l'ordre des pôles dans les cas suivants :

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}, \ \ f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

2. Calculer, sans utiliser la partie singulière, les résidus de f en chacune de ses singularités isolées :

$$\begin{array}{lll} f(z) = \frac{z}{\sin z} & f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \frac{z}{e^z+1} \\ f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)} & f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos(z)} \end{array}$$

Pour chacune des singularités isolés de f, donner l'expression de la partie singulière associée et (re)trouver le résidu correspondant :

$$\begin{array}{lll} f(z) = e^{1/z} & f(z) = z\cos(1/z) & f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}} \\ f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)} \\ f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos z} & & \end{array}$$

Exercice 79. Déterminer les singularités des fonctions suivantes, leur nature et les résidus correspondants :

$$\textbf{a)}\ \frac{\sin z}{z^3-\pi^2 z}, \qquad \textbf{b)}\ \operatorname{cotan} z - \frac{1}{z}, \qquad \textbf{c)}\ \frac{\exp(\frac{1}{z})}{z-1}, \quad \textbf{d)}\ \pi \operatorname{cotan}(\pi z).$$

Exercice 80. Soit U un ouvert connexe. Même question que ci-dessus avec :

a) $\dfrac{f'}{f}$, lorsque f est une fonction holomorphe sur U.

b) $\dfrac{g}{h}$, lorsque g et h sont deux fonctions holomorphes sur U et que h a un pôle simple.

c) $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^n}$, lorsque f est une fonction holomorphe sur U, $z_o \in U$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 81. Soit f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$ où les a_j sont des pôles de f d'ordre m_j. Montrer qu'il existe g holomorphe dans U telle que $g(a_j) \neq 0\ \forall j$ et telle que, $\forall z \in U \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$, on ait

$$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{j=1}^{k}(z-a_j)^{m_j}}.$$

Exercice 82.

1. Montrer que si $f(z) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ est une série de fonctions holomorphes dans un ouvert U, uniformément convergente sur les compacts de U, alors f est holomorphe.

2. Soit $(z_n) \subset \mathbb{C}$ une suite sans point d'accumulation et $(m_n) \subset \mathbb{N}^*$. Construire une fonction holomorphew sont les seules singularités sont des pôles d'ordre m_n aux points z_n.

Exercice 83. Construire une fonction holomorphe dont l'ensemble des singularités est S, où :

$$S = \mathbb{R}, \qquad S = \{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}, \qquad S = \{t + it^2 \colon t \in \mathbb{R}^+\}, \qquad S = \{z \colon |z| = 1\}.$$

12.1 Fonctions méromorphes

Exercice 84. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On rappelle qu'une fonction est méromorphe sur U si f est holomorphe sur $U \setminus S$ où les points de S sont les pôles de f.

1. Soient f et g deux fonctions méromorphes sur U. Montrer que $f+g$ et fg sont méromorphes sur U.

2. Soit U un domaine et soit f une fonction méromorphe sur U avec $f \neq \tilde{0}$. Montrer que $\frac{1}{f}$ est méromorphe sur U.

3. Soit U un domaine et f une fonction méromorphe sur U avec $f \neq \tilde{0}$. Montrer que $\frac{f'}{f}$ est une fonction méromorphe dans U dont tous les pôles sont simples. Quels sont les résidus correspondants ?

12.2 Séries de Laurent

Exercice 85. Déterminer le domane d'holomorphie des séries de Laurent suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|} z^n \quad (a \in \mathbb{C}), \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n) z^n,$$

où R est une fraction rationnelle sans pôles dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 86.

1. Développer en série de Laurent dans $\mathbb{C}^*$ la fonction $f(z) = \exp(z + \frac{1}{z})$.

2. Soit $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Écrire les développements en série de Laurent dans les couronnes :

$$\{z \colon |z| < 1\}, \qquad \{z \colon 1 < |z| < 2\}, \qquad \{z \colon |z| > 2\}.$$

13 Applications du théoreme des résidus et de Rouché

Exercice 87. Calculer $I = \int_\gamma f(z)\,dz$ dans les situations suivantes ($t \in [0, 2\pi]$) :

1. $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}$, $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+2)}$,
2. $\gamma(t) = re^{it}$ ($r \neq 1$), $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z-1}$,
3. $\gamma(t) = 4e^{it}$ $f(z) = \dfrac{e^z}{z \sin z}$,
4. $\gamma(t) = e^{it}$, $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{z^4}$.

Exercice 88. Vérifier que les intégrales impropres suivantes convergent. Ensuite, en appliquant le théorème des résidus et les lemmes de Jordan (exercice 46) à un demi-cercle bien choisi, les calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx, \qquad (\text{considérer } f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2}), \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}dx, \qquad (\text{considérer } f(z) = \frac{ze^{iz}}{1+z^2}).$$

Exercice 89. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. En appliquant le théorème des résidus à la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ et au circuit de support $[0, R] \cup \{Re^{it} \colon 0 \le t \le \frac{2\pi}{n}\} \cup \{te^{i2\pi/n} \colon 0 \le t \le R\}$, démontrer que $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$.

Exercice 90. En intégrant la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ sur un circuit bien choisi, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

Exercice 91. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)dx$.
(*Indication :* on pourra appliquer le théorème des résidus au countour d'un rectangle d'hauteur $a/2$. On rappelle aussi que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$).

Exercice 92. On fixe $a \in]0, 1[$. On note $\widetilde{\text{Log}}$ la détermination du logarithme définie sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, et on pose pour $z \in U$

$$f(z) = e^{(a-1)\widetilde{\text{Log}}(z)} .$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{a-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
   Pour $0 < r < 1 < R$, et $0 < \epsilon < 1$, on considère le circuit $\Gamma_{\epsilon,r,R}$, constitué par re^{-it} ($\epsilon < t < 2\pi - \epsilon$), Re^{it} ($\epsilon < t < 2\pi - \epsilon$) et les deux ségments $[re^{i\epsilon}, Re^{i\epsilon}]$, $[Re^{-i\epsilon}, re^{-i\epsilon}]$.
   On pose $I(\epsilon, r, R) = \displaystyle\int_{\Gamma_{\epsilon,r,R}} \frac{f(z)}{z+1}dz$.
2. Calculer $I(\epsilon, r, R)$ par le théorème des résidus.
3. Calculer de deux manières différentes $I(r, R) = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon, r, R)$.
4. Déterminer la limite de $I(r, R)$ quand $r \to 0$ et $R \to +\infty$ et en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} .$$

Exercice 93. (Applications du théorème de Rouché)

1. Montrer que la fonction $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$ a trois de ses zéros dans le disque $D(0, 1)$ et tous ses zéros dans le disque $D(0, 3)$.
2. Démontrer que l'équation $e^z = 3z^n$ possède n racines simples dans $D(0, 1)$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} \cdots + a_0$. Montrer qu'il existe c dans le cercle unité tel que $|P(c)| \ge 1$.
4. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(0, r)}$, où $r > 0$ et telle que

$$|f(0)| + |f'(0)|r < \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

   Montrer que f possède au moins deux zéros dans le disque ouvert $D(0, r)$.