Feuille de TD # 8

Séries de Fourier

Notations

a) Si $f :]0, 2\pi[\to \mathbb{C}$ est Lebesgue intégrable, nous posons

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{\imath nx},\ \forall\, N \in \mathbb{N},$$

$$Sf(x) := \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) \text{ (si cette limite existe).}$$

b) La série *formelle* $Sf := \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\,\cdot}$ est le *développement en série de Fourier* de f ou la *série de Fourier* de f.

Exercice # 1.

a) Montrer que $\langle f, g\rangle := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx$ définit un produit scalaire sur L^2.

b) Posons $e_n(x) := e^{\imath nx}, \forall\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in]0, 2\pi[$. Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.

c) Exprimer $c_n(f)$ à l'aide de e_n et du produit scalaire ci-dessus, et retrouver l'inégalité de Bessel.

Exercice # 2. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Alors :

a) f est intégrable sur tout intervalle borné.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(y)\, dy = \int_a^{a+2\pi} f(y)\, dy, \forall\, a \in \mathbb{R}.$

Exercice # 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{pour } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{pour } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Déterminer Sf.

c) Calculer, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$.

Exercice # 4. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) := x$ pour $x \in [0, 2\pi[$. Que donne l'égalité de Parseval ?

Exercice # 5. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) := |\sin x|$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Exercice # 6. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) := |x|$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice # 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) := x^2$.

a) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice # 8. Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $] - \pi, \pi]$ par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Calculer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}$.

Exercice # 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que $f(x) = (\pi - x)/2$ sur $]0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de f sur une période.

b) Calculer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice # 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire et telle que $f(x) = 2x - \pi$ sur $[0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$ et exprimer $f(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$.

b) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice # 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et vérifiant $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$.

a) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice # 12. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice # 13. (Noyau de Dirichlet) Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Soit

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} e^{\imath kx}, \; \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

D_N est le *noyau de Dirichlet.*

a) Montrer que

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy, \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que

$$\begin{aligned} D_N(y) &= \begin{cases} \dfrac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin(Ny)\ \mathrm{cotan}(y/2) + \cos(Ny), & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} D_N(y)\,dy = \int_{-\pi}^{0} D_N(y)\,dy = \pi.$

Exercice # 14. (Noyau de Fejér) Soit

$$F_N := \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_N}{N+1},\ \forall\, N \in \mathbb{N},$$

où D_j est le noyau de Dirichlet (F_N est le *noyau de Fejér*). Soit

$$T_N(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_N(f)}{N+1},\ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Montrer les propriétés suivantes.

a) Si f est 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$, alors

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\,F_N(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,F_N(y)\,dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) $F_N(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2[(N+1)y/2]}{(N+1)\,\sin^2(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}.$

En particulier, $F_N(y) \geq 0, \forall\, y, \forall\, N$.

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\,dy = 2\pi.$

d) Pour tout $0 < \delta < \pi$, $F_N \to 0$ uniformément sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ quand $N \to \infty$.
En particulier, pour tout $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} F_N(y)\,dy \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

Exercice # 15. (Produit de convolution de fonctions périodiques) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions 2π-périodiques, avec f intégrable sur $]0, 2\pi[$ et g continue. Nous définissons

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que le *produit de convolution* $f * g(x)$ est bien défini, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $f * g$ est 2π-périodique.

c) Calculer les coefficients de Fourier de $x \mapsto f(x-t)$ en fonction de t et de ceux de f.

d) En déduire les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction de ceux de f et g.

Exercice # 16. Cet exercice est une suite des deux exercices précédents, et nous reprenons les notations de ces exercices. Nous munissons $I =]0, 2\pi[$ de la mesure $(1/2\pi)\,\lambda_1$ (avec λ_1 la mesure de Lebesgue sur $]0, 2\pi[$).

a) Montrer que $T_N(f) = f * F_N, \forall\, 1 \leq p \leq \infty, \forall\, f \in L^p(I)$, f 2π-périodique.

b) Avec p et f comme dans la question précédente, montrer que $T_N(f)$ est 2π-périodique, $T_N(f) \in L^p(I)$ et $\|T_N(f)\|_{L^p(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)}$.

c) Soit $1 \leq p < \infty$. Si $f \in C_c^\infty(I)$ et f est prolongée par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$, montrer que $\|T_N(f) - f\|_{L^p(I)} \to 0$ quand $N \to \infty$. Indication : utiliser le théorème de Fejér.

d) Soit $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p(I)$ et f est 2π-périodique, montrer que $\|T_N(f) - f\|_{L^p(I)} \to 0$ quand $N \to \infty$. Indication : utiliser la question précédente et la densité de $C_c^\infty(I)$ dans $L^p(I)$.

e) Calculer $c_n(T_N(f)), \forall\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

f) En déduire que « les coefficients de Fourier d'une fonction déterminent la fonction » : si $f \in L^1(I)$ et f est 2π-périodique, alors $[c_n(f) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}] \implies f = 0$.

Exercice # 17. (Inégalités faibles de Bernstein (I)) Commençons par la fin de l'histoire, qui dépasse le cadre de cet enseignement. En général, l'ordre de grandeur d'une fonction ne donne aucune information sur l'ordre de grandeur de sa dérivée. Par exemple, les fonctions $x \mapsto f_n(x) := \sin(nx)$ satisfont toutes $|f_n| \leq 1$, mais leurs dérivées peuvent être arbitrairement grandes quand $n \to \infty$. Le *théorème de Bernstein* donne une inégalité entre f' et f *si f est un polynôme trigonométrique de degré fixé*. Il affirme que, si f est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$, alors

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq n \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|. \tag{1}$$

Nous allons montrer une forme plus faible, avec un facteur supplémentaire 3, de cette inégalité, et une version L^p de celle-ci :

$$\|f'\|_{L^p} \leq 3n\, \|f\|_{L^p},\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty,\ \forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n. \tag{2}$$

Le cadre de la preuve est celui des trois exercices précédents.

a) Soit $g(x) := e^{\imath nx} f(x)$. Si f est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$, montrer l'identité suivante (avec F_n le polynôme de Fejér, et T_n comme dans l'exercice précédent) :

$$f'(x) = \imath n\, f(x) - 2\imath n\, e^{-\imath nx}\, (g * F_n)(x) = \imath n\, f(x) - 2\imath n\, e^{-\imath nx}\, (T_n(g))(x), \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

b) En déduire (2).

Exercice # 18. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

a) Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f), \forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et calculer $c_0(f')$.

b) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt.$$

c) Dans quel cas a-t-on égalité ?